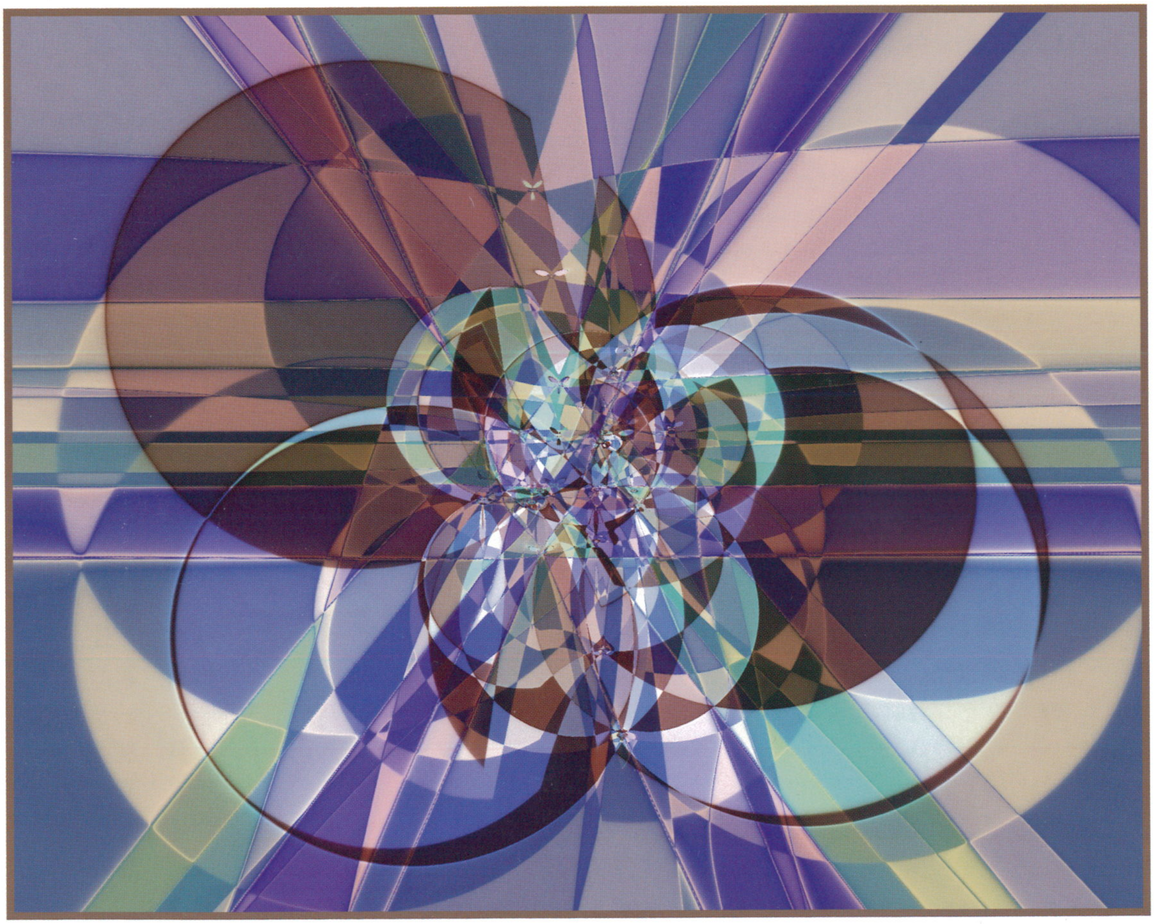
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2009年9月1日発行　第47巻9号　毎月1回1日発行

ISSN 0386—2240

数理科学

9
2009

特集 シュレーディンガー
拡げた波紋の衝撃と足跡を追う



No.555

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 555 September 2009

シュレーディンガー

拡げた波紋の衝撃と足跡を追う

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2006 年/12 省略
2007 年/1 ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2 ランダム行列の広がり
/3 現代物理における超対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊　双対性の世界
/5 数学の直観的理解
/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊　素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊　多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊　対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊　代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数

数理科学臨時別冊一覧

07 年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12 計算神経科学への招待
08 年/1 演習 くり込み群
08 年/3 熱方程式で学ぶ逆問題
08 年/5 重力理論講義
08 年/6 代数幾何入門講義
08 年/7 ネットワーク科学への招待
08 年/9 物理のためのリー群とリー代数
08 年/11 量子暗号理論の展開
09 年/1 量子力学の考え方
09 年/7 ゲージ理論の発展

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）

旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

September 2009 MATHEMATICAL SCIENCES Number 555

特集／シュレーディンガー

巻頭言

小伝に波紋を追う

小 林　澈 郎

1. はじめに

1926年チューリッヒでシュレーディンガーが起した大きな波は[1,2]，まずバルト海に臨むコペンハーゲンを津波となって襲った．ボーアとその学派の受けた衝撃は想像に難くない．時と共に拡がっていくこの一風変った波は，高い波柱が絡まりあう（entangle）現象が最近は注目を浴びているようである．古くはファインマンの経路積分のアイディアもシュレーディンガーの波に胚胎すると思われる．

この波の下にはシュレーディンガーの古典物理学の底知れない蘊蓄と，梵我一如というヒンドゥウの思想が通奏低音として流れているように思われる．

本特集では，この波の衝撃とその余波の拡がりを，それぞれの分野のエキスパートに伝えていただく．この小伝でシュレーディンガーの足跡を辿りつつ，論稿のガイドを勤めたい．

2. 出自[3]

1887年8月12日，シュレーディンガーはウィーンに生れた．父ルドルフはウィーン工業大学卒の技術者で家業のリノリウム油布工場経営者．知的な人で動植物研究を趣味とし，余暇に顕微鏡を覗き，論文も書く．実業界でも信望厚かった．母ゲオルギーはルドルフの大学時代の恩師バウエルの娘で，その母は英国の旧家の出である．ウィーンの中流上層階級家庭の一人っ子としてシュレーディンガーは，両親，母方祖父母，叔母たちに寵愛されて育つ．メイドやナースも含め年長の女性に囲まれて幼少時を過したことは，彼の性格形成に少からぬ影響を及ぼしたであろう．

初等教育は家庭教師が週2回．父もよい先生であった．ウィーン第一のアカデミッシェ・ギムナジウムに進む．古典語重視の人文主義的教育であるが，在学8年間を首席で通した．

青春時代のシュレーディンガーが空気を吸っていたのは，独特の陰影を帯びた妖しい文化の華咲くウィーンである．

華麗な女性関係が屡々顰蹙を買うシュレーディンガーという風評の外因の一つは，所謂「ウィーン世紀末文化」[4]が醸し出す耽美的・頽廃的な雰囲気の中で若い時代を堪能したことにもあるのではなかろうか．当時の富裕市民階層は，陽気に芸術を愛し社交を楽しんでいた．女性には慇懃に接し，気の利いた会話が求められた．しかし，その中核には，常識的道徳観念などの想像を絶する奔放な性関係がオブラートに包まれて鎮座しているのである．

3. 物理学の道へ

1906年秋ウィーン大学に入学した．直前ボルツマンが不幸な死を遂げシュレーディンガーは失望するが，ハーゼンエールに理論物理学を，エクスナーに実験物理学を学び，その研究室で助手シュヴァイドラーの指導により，実験的研究で学位を得た．ボルツマン対マッハ論争が研究室でも活発だったが，こうした論争で実在論者シュレーディンガーは実証主義を批判的に深く学ぶことができた．

1914年の大戦が勃発すると予備砲兵士官として応召．要塞砲台付で勤務したが，余暇には出たばかりの一般相対論を勉強することができた．敗戦でウィーン大学助手に復職し，色彩論研究に没頭した．この成果でウィーンアカデミー・ハイティング賞を受け，一躍同分野の世界的権威となった．色彩論はヴェーダーンタ哲学への傾倒と無縁ではなかったであろう．これを機に1920年アンネマリー・バーテルと結婚．生涯を共にした．

4. 新しい世界へ

イェナ大学，シュトゥットガルト工業大学，ブレスラウ大学を転々として，1921年10月チューリッヒ大学理論物理学教授に就任した．同市内のE.T.H.（連邦工業大学）との合同コロキウムで，デバイやワイルとの議論で刺激を与えられた．講義のために『Atombau und Spektrallinien』を精読したことも後に役立った．

1925年，アインシュタインの「単原子理想気体の量子論」第二報[5]でドゥ・ブロイの新理論の重要性が指摘されていることに衝撃を受けた．間もなく公刊されたドゥ・ブロイの学位論文を読み，アインシュタインに自分の考え[6]を論文で伝えたが，内に湧いてくる新しいアイディアに圧倒される思いだった．

1925年，クリスマス休暇にアローザの山荘に籠ったシュレーディンガーは研究に精魂を傾けた．すなわち「波動力学」の誕生である．「固有値問題としての量子化（I）」は1926年1月27日に *Annalen der Physik* が受理．（II）と（III）の間に2本の関連論文が入り，最後の（IV）は6月21日受理．山荘に同行したという女性は今もって誰か分らない由．波の解釈，粒子 vs. 波動等の問題は残されたが，行列力学と並び“量子力学”[*1]はでき上ったのである．波動は古典物理学でお馴染みである．波動力学は忽ち波紋を拡げて，ミクロの世界の扉を次々に開いていった．

1935年，シュレーディンガーは所謂EPRパラドックス[7]に対して「量子もつれ (entanglement)」[8]の考えを提案して作用の非局所性を肯定した．実は現在「量子もつれ」が思考実験のレヴェルではなく，現実に実現されて「量子情報処理」に重要な役割を果しているのである．

5. 流離・晩年の輝き

1927年，プランクの後任としてベルリン大学教授に就任したが，ヒトラーの台頭を嫌いオックスフォードへ脱出．1933年にディラック，前年決定していたハイゼンベルクと共にノーベル物理学賞を受賞した．

エディントンとの交流はシュレーディンガーに宇宙論への目を開かせたが，確たる研究に至らぬ内に再びエディンバラ，グラーツ，オクスフォード，ゲントを流浪し，1940年10月，Dublin Institute for Advanced Studies の一部門 School of Theoretical Physics の主任教授に就き，晩年の研究生活が約束された．

1943年，シュレーディンガーは「生命とは何か」[*2]という話を一般聴衆向けに，研究所一般講演で行った．斬新なアイディアを深く考え抜き，周到に準備された内容は聴く人々を魅了した．「遺伝暗号」概念が生まれた．静かな波紋は再び怒涛と

*1) Born が原子レヴェルの力学をこう呼んでいた．*Z. Phys.* **26** (1924) 379.

*2) 翌年同名の本として出版された[9]．

化した．物理学者にも生命に迫れる勇気を与えた．ワトソン–クリックから分子生物学，さらに新しい展開へと波紋は更に拡がり続けている．

波動力学の創造から生物物理学——広く分子生物学——の始祖となるまでシュレーディンガーは物理の広い分野で活躍してきた．しかし私には，彼がなぜ，場の量子論研究に向かわなかったのかがどうしても理解できないのである．頑なまでの波動一元論のゆえか．いや，ヴェーダーンタの哲理が彼の物理研究の理念と微妙にあざなわれていたのであろうか．難しい宿題が残されている．

6. 最晩年

1956 年，シュレーディンガーは長い流浪の旅を終え，ウィーン大学特任理論物理学教授に就任して故国に帰った．週 2 回一般相対論と膨張宇宙の講義をした．久々にティリングらとも会って旧交を温め，祖国に帰った気分に浸った．また著書『精神と物質』[10)]，『わが世界観』[11)]などを上梓し，「実在とは何か」などの問題を深く思いを潜めていた．チロルのアルプバッハの自然を愛して衰えつつある健康を養っていたが，1961 年 1 月 4 日，ウィーンの病院でアンネマリー夫人に看取られて死去した．

シュレーディンガー略年譜

1887 年	ウィーンにて誕生．父は富裕な実業家
1898 年	アカデミッシェ・ギムナジウム
1906–	ウィーン大学・実験的研究により
1910 年	学位取得
1914 年	ウィーン大学にて大学教授資格取得
1920 年	色彩論にてウィーン科学アカデミー・ハイティンガー賞受賞
同　年	アンネマリー・バーテルと結婚
同　年	イェナ大学助教授，シュトゥットガルト工業大学助教授
1921 年	ブレスラウ大学理論物理学教授
同　年	チューリッヒ大学理論物理学教授
1926 年	波動力学の創造
1927 年	ベルリン大学理論物理学教授
1933 年	ナチス政権を嫌い，ドイツ脱出．オクスフォード大学モードリンカレッジ・フェロー
同　年	ディラック，ハイゼンベルクと共にノーベル物理学賞受賞
1936–	グラーツ大学教授，ゲント大学客員教授，オクスフォード大学フェロー
1940 年	ダブリン高等研究所理論物理学主任教授
1943 年	研究所公開講演にて「生命とは何か」の連続講義
1956 年	帰国．ウィーン大学特任物理学教授
1961 年	ウィーンにて死去

参考文献

1) 湯川秀樹監修：『波動力学論文集』，田中　正・南　政次訳，共立出版 (1974).
2) K. プルチブラム著，江沢　洋訳・解説：『波動力学形成史　シュレーディンガーの書簡と小伝』みすず書房 (1982).
3) D. ムーア著，小林澈郎・土佐幸子訳：『シュレーディンガー　その生涯と思想』培風館 (1995). とくに断わらないが小伝の各所は本書及び文献 2) に従う.
4) W.M. ジョンストン著，井上修一・岩切正介・林部圭一訳『ウィーン精神 I, II』みすず書房 (1986).
5) A. Einstein, *Berliner Berichte* **13** (1925) 3.
6) E. Schrödinger, *Phys. Z.* **27** (1926) 85.
7) A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.
8) E. Schrödinger, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **31** (1935) 553.
9) E. Schrödinger,『What is Life?　with Mind and Matter and Autobiographical Sketches』 Cambridge University Press (1944). 岡　小天・鎮目恭夫訳『生命とは何か』—物理的にみた生細胞—岩波新書 (1948). 後に「21 世紀前半の読者にとっての意義」を加えて岩波文庫に収録 (2008).
10) E. シュレーディンガー著，中村量空訳：『精神と物質』工作社 (1987).
11) E. シュレーディンガー著，橋本芳契監修・中村量空・早川博信・橋本契訳：『わが世界観』ちくま学芸文庫 (2002).

（こばやし・てつろう，東京都立大学名誉教授）

波動方程式の創造

江 沢　洋



シュレーディンガー（左）とディラック（右）（ダブリン高等研究所提供）.

1. 幾何力学から波動力学へ

この表題は，奇妙に見えるかもしれないが粒子の古典力学から波動力学への革命を

$$\text{古典力学} : \text{波動力学} = \text{幾何光学} : \text{波動光学} \tag{1.1}$$

という比例式になぞらえることを言い表わしたつもりである.

1.1 ハミルトン–ヤコビ形式の力学

古典力学にハミルトン–ヤコビの形式[1)]といわれるものがある．それは，粒子のエネルギー E と一連の初期条件に応ずる軌道群を考える.

たとえば，荷電 q，質量 m の粒子が座標原点に静止した電荷 Q の粒子に散乱される場合（ラザフォード散乱）なら，初期条件を $t=-\infty$ に粒子たちが

$$\left.\begin{array}{l}\text{無限遠}\, z=-\infty\, \text{から,}\\ \text{さまざまの衝突径数}\, b=\sqrt{x^2+y^2}\, \text{で}\end{array}\right\}\text{入射する} \tag{1.2}$$

ものとして，それらの軌道群を描くと図 1 のようになる[2)].

この場合，粒子の位置座標 (x,y,z) を与えると，その位置での粒子の運動量が 2 つ定まる．粒子が入射してきて Q に跳ね返される前の運動量 $\boldsymbol{p}_-(x,y,z)$ と，跳ね返された後の運動量 $\boldsymbol{p}_+(x,y,z)$ とである．跳ね返される前と後というのは，軌道が図 1 の放物線（軌道群の包絡線）に触れる前と後を意味する.

その 2 つの運動量に応じて，2 つの関数 $W_\pm(x,y,z)$ が存在して

$$\boldsymbol{p}_\mp(x,y,z)=\mathrm{grad}\,W_\mp(x,y,z) \tag{1.3}$$

と書ける[3)]．この式は，粒子の位置 (x,y,z) における運動量ベクトル $\boldsymbol{p}_\mp(x,y,z)$ が，その点をとおる $W_\mp$ の等高線（正確には等高面）に直交していることを言っている．図 2 (a) には $W_-(x,y,z)$ の $y=0$ の面上における等高線を，図 2 (b) には $W_+(x,y,z)$ の $y=0$ の面上における等高線を示した．図 1 と見比べて，粒子の運動量 $\boldsymbol{p}_\mp$ が，したがって粒子の軌道が $W_\mp$ の等高線に直交している様子を頭に想い描いて欲しい.

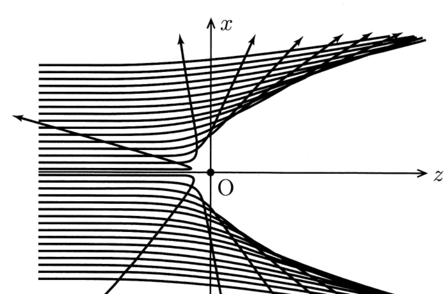


図 1　ラザフォード散乱における粒子の軌道群（$y=0$ の面上にあるもののみを示す）．粒子たちはエネルギー E をもって $z\to\infty$ から z 軸に沿って原点に向かうとし，さまざまの衝突径数 b に対する軌道の一群を描いた[2)].

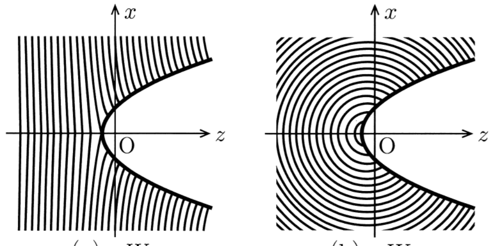


図 2　ハミルトンの主関数 W の 2 つの価 (a) W_-，(b) W_+ の等高線（等高面と $y=0$ の面との交線）．これらと，対応する粒子の軌道は空間の各点で直交している[2]．

$W_\mp(x,y,z)$ は，$W(x,y,z)$ という 2 価関数があって，それが各点 (x,y,z) でとる 2 つの値であると見ることもできる．これからは，この見方をとることにしよう．この関数 $W(x,y,z)$ はハミルトンの主関数とよばれる．

各点 (x,y,z) における運動量が (1.3) で与えられ，原点にある電荷 Q のつくるクーロン場における位置エネルギーは

$$V(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}\quad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \tag{1.4}$$

であるから，粒子 m のエネルギーは

$$E=\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right\}+V(x,y,z) \tag{1.5}$$

で，一定である．逆に，この方程式をみたし，かつ境界条件

$$W(x,y,z)\sim\sqrt{2mE}z\quad (z\to-\infty, x, y \text{ は任意}) \tag{1.6}$$

をみたす W は，その等高線に直交する曲線群として初期条件 (1.2) にしたがうラザフォード散乱の軌道群を与えるのである．つまり，ラザフォード散乱という力学の問題を解くのに，方程式 (1.5) を境界条件 (1.6) の下に解いて，運動量を (1.3) からきめることにしてもよい．軌道上の各点での運動量が分かれば，速度もわかるから，軌道の各点に粒子が到着する時刻を求めることもできて，粒子の運動は完全に定まるのである．これが力学のハミルトン–ヤコビ形式である．

1.2 幾何光学

幾何光学の基本方程式を (1.5) の形

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2=C^2n(x,y,z)^2 \tag{1.7}$$

に書いたのは，ほかならぬハミルトン（W.H. Hamilton）だ．ここで (1.5) の

$$\sqrt{2m\{E-V(x,y,z)\}}\quad を\quad Cn(x,y,z) \tag{1.8}$$

で置き換えた．n は光に対する屈折率であり，その空間で W の等高線は光の波面を表わす．C は何かある正の定数である．

簡単のために，屈折率は x, z によらず，$y=0$ を境に $y<0$ で n_1 であり，$y>0$ で n_2 である場合を考えてみよう（図 3）．

光は $y<0$ の遠方からベクトル $\boldsymbol{k}_1=(k_{1x}, k_{1y}, 0)$ の方向に入射するとすれば，W は入射光の波面 $W=\text{const.}$ が $\boldsymbol{k}_1$ に垂直という境界条件

$$W(x,y,z)\sim C(k_{1x}x+k_{1y}y)$$
$$\left(\sqrt{k_{1x}^2+k_{1y}^2}=n_1,\quad y\to-\infty\right)$$

をみたすべきである．したがって，(1.7) から，W は z によらず，$y<0$ においては

$$W(x,y)=C(k_{1x}x+k_{1y}y)\ \left(\sqrt{k_{1x}^2+k_{1y}^2}=n_1\right) \tag{1.9}$$

でなければならない．W には付加定数があってもよいが，特に意味はないからなしとしよう．領域 $y>0$ では，(1.7) から

$$W(x,y)=C(k_{2x}x+k_{2y}y)\ \left(\sqrt{k_{2x}^2+k_{2y}^2}=n_2\right) \tag{1.10}$$

であるが，この W が境界面 $y=0$ で $y<0$ の (1.9) とつながるためには $\lim_{y\to0+}W(x,y)=\lim_{y\to0-}W(x,y)$ がすべての $-\infty<x<\infty$ で成り立たなければならない．よって

$$k_{1x}=k_{2x}. \tag{1.11}$$

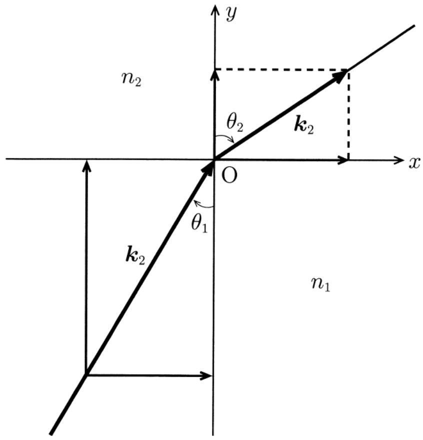


図 3　屈折の法則を導く．

図 3 によれば入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 に対して $\sin\theta_l = k_{lx}/\sqrt{k_{lx}^2 + k_{ly}^2}$ $(l = 1, 2)$ が成り立つ．ここで (1.9), (1.10), (1.11) を思い出せば

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \tag{1.12}$$

が得られる．これは屈折の法則にほかならない．

ここで，力学の (1.5) を光学の (1.7) に転釈するのに使った対応関係 (1.8) によれば，力学における最小作用の原理が，幾何光学におけるフェルマの原理[4]に言い換えられることにも注意しておこう[1]．

1.3 波動光学

幾何光学は，一般に誘電率や透磁率の，したがってまた屈折率の空間変化が緩やかな場合にかぎって成り立つのである．それ以外の場合は波動光学の出番だ．

波動の波面というのは位相が一定の面であるから，波動を表わす関数 $u(x,y,z)$ は，波面を表わす関数 $W(x,y,z)$ と

$$u(x,y,z) = \exp[i\kappa W(x,y,z)] \tag{1.13}$$

の関係にあるだろう．κ は何かある定数である．波動の方程式は，一般に u の 2 階微分を含む．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{i\kappa W}$$
$$= \left\{ i\kappa\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \left(\kappa\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \right\} e^{iCW}$$

であるから，最初に言ったように W の変化が緩やかな場合には 2 階微分の項を省略して

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \sim \left\{ -\left(\kappa\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \right\} u \tag{1.14}$$

のように読み替えてよい．これを逆にいえば，W の変化が緩やかな場合の (1.14) の右辺は，急激に変化する媒質のなかでは左辺で置き換えることが考えられる．

1.4 波動力学の基礎方程式

古典力学が原子の世界で破綻したことは，原子の内部のような急激に変化する環境における破綻と想像される．古典力学が幾何光学と密接な関係にあったことを思い合わせると，比例式 (1.1) にしたがって古典力学を波動力学に作り直すことが考えられる．古典力学のハミルトン–ヤコビの方程式 (1.5) を (1.14) にしたがって波動を表わす関数 $u(x,y,z)$ の式に読み替えれば

$$-\frac{1}{2m\kappa^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + Vu = Eu \tag{1.15}$$

となる．ここで，ド・ブロイが運動量 p の自由粒子（$V = 0$）に波長 $\lambda = h/p$ の波動を対応させたことを思い出そう．h はプランクの定数である．波長 λ の波動は $u = \exp[2\pi i x/\lambda]$ であるから，

$$u = \exp\left[2\pi i\frac{x}{\lambda}\right] = \exp\left[\frac{ipx}{\hbar}\right] \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right) \tag{1.16}$$

を (1.15) に代入すれば $p^2/(2m\kappa^2\hbar^2) = E$ となる．これが正しい式 $p^2/(2m) = E$ となるためには $\kappa^2 = 1/\hbar^2$ でなければならない．したがって (1.15) は

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x,y,z) \right\} u = Eu \tag{1.17}$$

となる．これがシュレーディンガーの到達した方程式である．これが原子世界を律する正しい方程式かどうか？ 原子世界の諸問題に適用して実験に合うかどうかを見なければならない．

2. 水素原子のスペクトル

シュレーディンガーは方程式 (1.17) を水素原子の電子に適用し，ボーアが彼の原子模型から導いた電子のエネルギー準位の式

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\mu e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \quad (n=1,2,\cdots) \tag{2.1}$$

が出るかどうか，見ることにした（波動力学の第1論文，1926年1月27日受理）[5]．ここに μ は電子の質量，$-e$ が電子の電荷である．

水素原子の電子は，核のクーロン・ポテンシャルの中を運動するので，電子の位置を核を原点とする極座標 (r,θ,φ) で表わせば，シュレーディンガーの方程式 (1.17) は，球関数 $Y_l^m(\theta,\varphi)$ を用いて

$$u = u(r,\theta,\phi) = R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$(l=0,1,2,\cdots, m=-l,-l+1,\cdots,l) \tag{2.2}$$

と書くとき

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right) -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}\right\}R(r) = ER(r) \tag{2.3}$$

となる．電子は原子核に束縛されて遠くには行けないので，境界条件

$$R(r)\to 0 \quad (r\to\infty) \tag{2.4}$$

を要求すべきであろう．この方程式がシュレーディンガーには解けなかった．彼はワイル (H. Weyl) に助けを求めた．ワイルは，次のようにラプラス変換を用いて解き，参考書[6]を教えた．クーラン・ヒルベルトの教科書[7]は1924年に出ていたが，シュレーディンガーの論文に登場するのは後の第2論文（1926年2月23日受理）[5] になってからである[*1]．

まず，$R(r)$ が $r\sim 0$ でどう振る舞うかを見るため $R(r)\sim r^\alpha$ を方程式 (2.3) に入れると

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Big\{\alpha(\alpha+1)-l(l+1)\Big\}r^{\alpha-2}+O(r^{\alpha-1})=0$$

となるので $\alpha=l$，あるいは $-l-1$．シュレーディンガーは（あるいはワイルは）α は正でなければならないといって第2の解を捨て $\alpha=l$ をとる．そこで

$$R(r) = r^l\chi(r) \tag{2.5}$$

とおいて，(2.3) を χ に対する方程式に直すと

$$\left\{\frac{d^2\chi}{dr^2}+(l+1)\frac{2}{r}\frac{d\chi}{dr}+\frac{2\mu E}{\hbar^2}+\frac{2\mu e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\frac{1}{r}\right\}\chi(r) = 0 \tag{2.6}$$

となって，因子 $1/r^2$ をもつ項がなくなる．これはラプラス変換に好都合だ．変換のために r をかけて

$$r\frac{d^2\chi}{dr^2}+\alpha\frac{d\chi}{dr}+(\beta r+\gamma)\chi=0$$

としよう．ここに

$$\alpha = 2(l+1),\quad \beta=\frac{2\mu E}{\hbar^2},\quad \gamma=\frac{2\mu e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2} \tag{2.7}$$

とおいた．この方程式をラプラス変換すると

$$\widetilde{\chi}(s) = \int_0^\infty \chi(r)e^{-kr}dr \tag{2.8}$$

とおいて

$$-(k^2+\beta)\frac{d\widetilde{\chi}(k)}{dk}+\{(\alpha-2)k+\gamma\}\widetilde{\chi}(k) = (\alpha-1)\chi(0) \tag{2.9}$$

を得る[8]．これが1階の微分方程式になったのは (2.6) に $1/r^2$ の項がなくなったおかげである．この方程式を解くには，まず右辺 $=0$ とおいた

$$\frac{d\widetilde{\chi}(k)}{\widetilde{\chi}(k)} = \frac{(\alpha-2)k+\gamma}{k^2+\beta}dk = \left(-\frac{2k}{k^2+\beta}+\frac{a_1}{k-c_1}+\frac{a_2}{k-c_2}\right)dk \tag{2.10}$$

を積分して

$$\widetilde{\chi}(k) = A(k-c_1)^{a_1-1}(k-c_2)^{a_2-1} \tag{2.11}$$

とし（A は任意定数），これに (2.9) の特殊解を加えればよい．ここに，c_1, c_2 は，(2.10) に見る部分分数分解のための $k^2+\beta=0$ の2根

*1）上に説明した (1.17) の導き方も，シュレーディンガーの第2論文のものに近い．

$$c_1 = \sqrt{-\beta}, \quad c_2 = -\sqrt{-\beta} \tag{2.12}$$

であり，a_1, a_2 も部分分数分解からきまるもので

$$a_1 = \frac{\alpha c_1 + \gamma}{c_1 - c_2}, \quad a_2 = \frac{\alpha c_2 + \gamma}{c_2 - c_1} \tag{2.13}$$

である．いまは，原子核に束縛された電子を考えるので $E < 0$，したがって $\beta < 0$ である．

シュレーディンガーは，この特殊解を無視しているので，われわれもそれに従い，(2.11) の逆ラプラス変換

$$\chi(r) = \int_{\mathrm{L}} \widetilde{\chi}(k) e^{kr} dk \tag{2.14}$$

を考えよう．積分路 L は，ラプラス逆変換の常として[8]，複素 k 平面で被積分関数の特異点 c_1, c_2 を左に見るように，かつ両端で被積分関数が 0 となるようにとる．

この積分を実行するのに，(2.12), (2.13) を (2.7) によって具体的に

$$c_1 = \sqrt{-\frac{2\mu E}{\hbar^2}}, \quad c_2 = -\sqrt{-\frac{2\mu E}{\hbar^2}},$$

$$a_1 = \frac{\mu e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar \sqrt{-2\mu E}} + l + 1,$$

$$a_2 = -\frac{\mu e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar \sqrt{-2\mu E}} + l + 1$$

と書いておこう．そして，シュレーディンガー–ワイルに従い，まずは

$$\frac{\mu e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar \sqrt{-2\mu E}} \neq 整数 \tag{2.15}$$

と仮定してみよう．

(2.14) の積分路をぐっと曲げて実 k 軸の負の部分を上下からはさむようにとると（図 4），仮定 (2.15) のため積分には $z = c_1$ から，$z = c_1 + \epsilon e^{i\phi}$ とおいて

$$\begin{aligned}\chi_1(r) &= e^{c_1 r}(c_1 - c_2)^{a_2 - 1} \int_0^{2\pi} \epsilon^{a_1} e^{i a_1 \phi} d\phi \\ &= e^{c_1 r} \epsilon^{a_1} (c_1 - c_2)^{a_2 - 1} \frac{1}{i a_1}(e^{2\pi i a_1} - 1)\end{aligned} \tag{2.16}$$

の寄与がある．同様に，$z = c_2$ からは

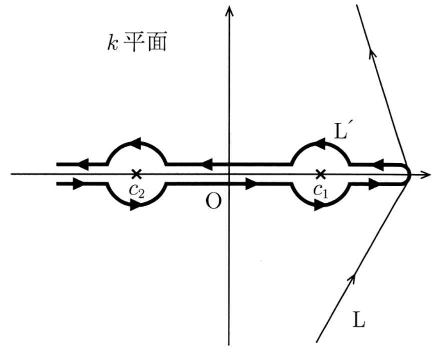


図 4　積分路 L の変形．$a_1 + a_2 =$ 整数なので，上下の積分路は $\mathrm{Im}\, k \to -\infty$ でつながる．

$$\chi_2(r) = e^{c_2 r} \epsilon^{a_2} (c_2 - c_1)^{a_1 - 1} \frac{1}{1 a_2}(e^{2\pi a_2} - 1) \tag{2.17}$$

の寄与がある（シュレーディンガーは ϵ^{a_l} の代わりに $r^{-a_l}(-1)^{a_l}\Gamma(a_l)\,(l = 1, 2)$ を書いているが何故か分からない）．

$\chi_1(r)$ は $r \to \infty$ で無限大に発散する！ これは要請 (2.4) に反するので (2.15) の "$\neq$ 整数" を "$=$ 整数" に変えなければならない．逆に，これが整数なら上の発散の困難はおこらない．この整数を n と書いて

$$\frac{\mu e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar \sqrt{-2\mu E}} = n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，見事に水素原子のエネルギー準位の式 (2.1) が出る！ このとき (2.14) の $\chi(r)$ が水素原子の波動関数 $R(r)$ を与える

$$\chi(r) = e^{-\rho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$$

$$(L_\nu^{|\sigma} \text{ はラゲールの陪多項式}) \tag{2.18}$$

となることは文献9) にある L_ν の積分表示から分かる．

なお，方程式 (2.3) を今日の教科書は級数展開の方法で解くが，この方法を始めたのはゾンマーフェルトである[10]．

シュレーディンガーは続く第 3 論文（1926 年 3 月 10 日受理）[5]で水素原子に電場をかけたときのスペクトルの変化が彼の方程式から—ボーアの対応原理による計算とはちがって—正しく得られ

ることを示した．磁場の影響については，第4論文（1926年7月21日受理）[5]でベクトル・ポテンシャルを含むハミルトン–ヤコビの方程式の運動量を $-i\hbar\,\mathrm{grad}$ でおきかえて（今の目で見て）正しい方程式を得，正常ゼーマン効果までは出せると思うと述べたが，計算には踏み込まなかった．この方程式では波動関数が複素数になり，その点でためらいがあったのだ．$-e|u|^2$ が電荷密度をあたえるとはしていたが，波動関数の物理的な意味はまだ謎だった．シュレーディンガーが波動に対して抱いていた物理的描像については，文献11) を参照．

3. 積分 (2.14) について

前節では，積分 (2.14) のシュレーディンガーの扱いに疑問があることを (2.17) の下に注意した．この積分をまともに計算したらどうなるかを考えておこう．

被積分関数 $\widetilde{\chi}(k)e^{kr}$ は (2.11) に見るとおり一般に多価関数であるから，複素 k 平面に c_1 から c_2 にいたる切断線をいれよう．$a_1+a_2=$ 整数であるから図4の積分路はこの切断線を一周するようにとることができる．その結果，(2.14) は

$$\chi(r)=\alpha\int_{c_2}^{c_1}\widetilde{\chi}(k)e^{kr}dk$$

となる．α はある定数である．$c_2=-c_1$ であるから，これを

$$\chi_c(\rho)=\int_{-1}^{1}\widetilde{\chi}_c(t)e^{\rho t/2}dt \tag{3.1}$$

と書くことにしよう．ここに $k=c_1t$, $r=\rho/(2c_1)$ とし

$$\widetilde{\chi}_c(t)=(1+t)^{\mu-\kappa-1/2}(1-t)^{\mu+\kappa-1/2} \tag{3.2}$$

とした．α' を新しい定数として $\chi(r)=\alpha'\chi_c(\rho)$, かつ

$$\mu+\kappa-\frac{1}{2}=a_1-1,\quad \mu-\kappa-\frac{1}{2}=a_2-1 \tag{3.3}$$

とおいたのである．記号を複雑にしたようだが，(3.1) は

$$\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(\mu+\kappa+1/2)\Gamma(\mu-\kappa+1/2)}\frac{z^{\kappa+1/2}}{2^{2\mu}} \tag{3.4}$$

をかけると Whittaker 関数 $M_{\kappa,\mu}(\rho)$ の積分表示になる[12]．

この関数の $\rho\to\infty$ における振舞は積分 (3.1) を鞍点法[13]で評価すれば得られ

$$M_{\kappa.\mu}(\rho)\sim\Gamma(2\mu+1)\left[\frac{e^{\pi i(\mu-\kappa+1/2)}e^{-\rho/2}\rho^{\kappa}}{\Gamma(\mu+\kappa+1/2)}+\frac{e^{\rho/2}z^{-\kappa}}{\Gamma(\mu-\kappa+1/2)}\right] \tag{3.5}$$

となる[12]．これが水素原子の電子の波動関数であるためには $\rho\to\infty$ で発散する $[\cdots]$ 内の第2項が消えねばならず，そのため

$$\mu-\kappa+\frac{1}{2}=(\text{負の整数}) \tag{3.6}$$

でなければならない．これが水素原子のエネルギー準位をあたえる．シュレーディンガーの論理とは違うけれども，エネルギー準位は一致する．

参考文献

1) 江沢 洋『解析力学』，初版第2刷，培風館 (2008)．第7章．
2) 文献1)，第7章，例7.4.
3) 文献1)，第7章，(7.6) 式，ただし (7.11) を参照．あるいは (7.135) 式．例7.4では $W_{\mp}$ を $W_{\mp+}$ と書いている．
4) その証明は文献1) の §7.6.3.
5) 湯川秀樹監修『シュレーディンガー選集1—波動力学論文集』，田中 正・南 政次共訳，共立出版 (1974).
6) L. Schlesinger, *Differentialgleichungen*, Göschen (1900).
7) R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik, I*, Springer (1924).
8) 江沢 洋『フーリエ解析』，朝倉書店 (2009), §6.4.2 にあるベッセルの方程式の解法が参考になる．
9) 犬井鉄郎『球函数・円筒函数・超幾何函数』，河出書房 (1948), p.363.
10) A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien, Wellenmechnischer Ergänzungsband*, Vieweg & Sohn (1928), §7A.
11) K. プルチブラム『波動力学形成史—シュレーディンガーの書簡と小伝』，江沢 洋訳・解説，みすず書房 (1982) を参照．
12) 森口繁一ほか『数学公式 III』，岩波書店 (1960), p.73.
13) 江沢 洋『漸近解析』，岩波講座・応用数学，岩波書店 (1999).

（えざわ・ひろし，学習院大学名誉教授）

コペンハーゲンへの衝撃波



亀淵　迪

1. はじめに

物理理論は，本来，‘数学的形式’と‘物理的解釈’の二者より成る．このうち後者は，前者中に含まれている記号や表式がどのような物理的意味をもち，どのような物理的現実に対応するのかを明らかにすることである．これなくしての前者は，ただ一群の数式たるに止まる．古典物理学においては，物理量がそのまま変数として数式中に現れるので，改めて物理的解釈を施す必要はない．しかし量子力学に移るや事態は一変する．無限次元の行列とか，ヒルベルト空間の射線といったように，記号や表式が抽象的となり，現実との対応関係が自明ではなくなるからである．

量子力学の発展史においては，しかしながら，物理的に正しいと思われる数学的形式が先行し，その物理的解釈が後追いするという経過を辿った．1925年6月ハイゼンベルクによる量子論の行列的構造の発見に始まり，翌26年6月シュレーディンガーが波動力学に関する6篇の論文を書き終えるに及び，量子論の数学的形式はほぼ完成する．しかしその物理的解釈の確立までには，さらなる一年を要したのであった．

これと相前後してシュレーディンガーは盛んな講演活動を開始するが，そのクライマックスは1926年10月のコペンハーゲン訪問であったといえる．ここでのボーアやハイゼンベルクとの討論は激烈かつ徹底的なものであり，その結果，解釈問題の重要性・緊急性が改めて浮き彫りにされる．まさにシュレーディンガーの訪問がコペンハーゲン学派に一大衝撃を与えたというべく，これを契機に彼等はこの問題と真正面から対峙し，その解決を目指して全精力を傾注することとなる．

本特集では，人間シュレーディンガーのもつ豊かな多面性に関して，各著者がそれぞれの観点から，直接的な考察を試みられると仄聞する．しかし以下の小稿では，コペンハーゲン学派が受けたこの衝撃を背景に，シュレーディンガー像の，いうなれば陰画を一枚，エッセイふうに描いてみたいと思う．

2. コペンハーゲン　1926

シュレーディンガーの到着までの時間を利用して，1926年当時のボーア研究所の状況を一瞥しておこう．ド・ブロイの物質波動論の提出は1923年9月のことであるが，これが直ちにコペンハーゲン学派の注意を惹くには至らなかったようである．実際，スレーターの語るところによれば[1)]，“1924年春の時点でド・ブロイの仕事を知っている人は，コペンハーゲンには誰も居なかった．翌25年始めになってようやく彼の論文が研究所に届いたのだが，その新説が知れ渡るまでには，なおかなりの時日を要した”らしいのである．

何故このような事態となったのか，いくつかの理由が挙げられる．まず第一にパリが量子論研究の中心地ではなかったので，手紙や人物の往来が殆どなかったであろうこと．第二にコペンハーゲンでは，(電磁) 場は波動，物質は粒子という従来の考え方がやはり人々の心の底に残っていたのではないか．実際，ボーアは光量子の考えを当初あまり好まなかったし，コペンハーゲン学派――ボーア・クラマース・ハイゼンベルク等――の量子論研究は，粒子としての電子の力学を，対応原理に基づいて量子論化することに集中していたのである．

第三に，これは筆者の全くの想像に過ぎないが，パリ学派に対して一種の不信感があったのではなかろうか．事は1922年の新元素ハフニウム ($Z = 72$) の発見時に遡る．その解釈を巡って，コペンハーゲン・パ

り両学派間に論争があり，結局はボーア模型に基づく前者の解釈に軍配が上がった．この事件が尾を引いていたのではと想像される．要するに量子論研究に関する限り，パリは田舎なのであった．

ところで 1926 年 10 月の時点のボーア研究所には，ボーアの他に彼の助手役としてハイゼンベルク，研究員としてディラックとクラインが居た．また驚くべきことに，日本からの留学者が 5 名も居たのである——仁科芳雄・堀健夫・杉浦義勝・木村健二郎そして青山新一．このうち後二者は化学が専門であった．当時研究所はコペンハーゲン大学付属「理論物理学研究所」*1) と称していたが，上記の人たちの何人かは，地下の実験室で，物理や化学の実験研究に従事していたのである．因みに当時の‘理論物理学’には，‘新しい物理学’の意味も含まれていたらしい．

以上は研究所のソフト面であるが，ハード面についても一言しておかねばならない．1920 年の研究所発足時には，（現在は）C 棟と呼ばれている 3 階建ての一棟のみであったが，1926 年になって A, K 二棟が竣工した．これを機に C 棟 3 階（屋根裏部屋）には三つのアパートが設けられ，その一つにハイゼンベルクが住み込んだ．また A 棟は 2 階建ての小さな建物で，「ヴィラ」とも呼ばれ，これはボーア一家の住居に当てられた．当時のデンマークでは，施設の長はその構内に住み込む習慣があったからである．こうして，この新築早々のヴィラへの（おそらく）著名客人第一号がシュレーディンガーとなるわけである．

■ 3. 衝撃波到来 ■

この年の 7 月 21 日，シュレーディンガーはミュンヘン大学のゾンマーフェルトのセミナーで講演し，これにはハイゼンベルクも出席する．しかし講演後の討論から彼は，いまや自らの行列力学が波動力学の大波に呑み込まれんとしているとの危機感を覚え，早速ボーアに手紙を書き，直接シュレーディンガーと話し合う必要があると訴える．これを受けて——とハイゼンベルクは推測するのだがあるいは波動力学がただならぬ理論だと自ら察知してのことか，ボーアはデンマーク物理学会会長としての招待状（9 月 11 日付）をシュレーディンガー宛に送り，彼からは“10 月 1 日そちらに着きます”との返電（9 月 28 日付）が届く．こうして彼は単身コペンハーゲン学派の陣中に降り立つこととなる．

当日コペンハーゲン中央駅には，ボーアや（おそらく）ハイゼンベルクが出迎える．後者の自伝『部分と全体』によれば[2]，ボーアとシュレーディンガーの討論は，到着早々駅頭から始まったらしい．下って 10 月 4 日，シュレーディンガーは，当市の工科大学の大講堂において，物理学会会員約 100 名を前にして，「波動力学の原理」と題する講演を行った．自らの最近の成果について述べるとともに，コペンハーゲン学派の量子論との違いについても強調したと思われる．

しかし何分にもこれは公式の行事だったので，司会のボーアもここでは大変大人しく，続いて行われた晩餐会でも“素晴らしい”，“お見事”等々の賛辞を連発して客人を褒め上げた——とこのように目撃証人の堀氏は伝えている[3]．しかし，本格的な議論は，翌日午後の研究所セミナーから開始される．

本来，ボーア・ハイゼンベルクのコペンハーゲン二人組とシュレーディンガーとでは，考え方に根本的な相違があった．前者は粒子論から出発し，不連続的な遷移‘量子飛躍’を量子現象の本質であると考えた．これに対して後者は波動論の立場から，量子現象すべてを連続的な変化として理解できると主張した．こうして両者の討論は全くの正面衝突となり，前日の講演会とは一転，研究所はまさしく激論の場と化した．ボーアにとって幸いなことに，そしてシュレーディンガーにとっては不幸なことに，双方ともヴィラ内で起居をともにしていたので，討論は連日朝早くから始まり，ときには夜遅くまで続けられた．シュレーディンガーには暫時の避難所もなかったわけである．

もともとボーアという人は，普段は親切で礼儀正しいのであるが，いざ物理の議論となると，それに熱中してわれを忘れてしまうところがあった．とくにこのときの討論は，そばに居たハイゼンベルクの言葉を借りるならば[2]，“一歩たりとも譲らず，ほんの僅かな不分明をも絶対に許さない，殆んど狂信的ともいえる仮借ない態度だった”らしいのである（この状態のボーアを，筆者自身も一度研究所セミナーで目撃したことがある）．

このような激論が数日も続き，疲れ果てたシュレーディンガーは，遂に熱を出して寝込んでしまい，ボーア夫人マーグレーテの手厚い看護を受けることとなる．他方，ボーア自身も‘病室’に彼を見舞ったのであるが，そこでも議論は再燃し，時折廊下を通るハイゼンベル

*1) 1985 年「ニールス・ボーア研究所」と改称される．

クの耳にも“…をあなたは認めねばなりません”というボーアの声が聞こえてきたとの由である[2]．このとき病室内でどのような議論が交されたのかは，勿論，想像する他はない．

ここで話は逸れるが，ボーアが関与した密室内二者会談でもう一つ有名なものがある．第二次大戦中の 1941 年 10 月，独軍占領下のコペンハーゲンを訪れたハイゼンベルクとの会談で，おそらく原爆製造を巡っての微妙な問題が話し合われたか，と想像される．これに興味を抱いた英国の作家 M. フレインが，会談を「コペンハーゲン」と題する戯曲に仕立て上げ，これはわが国でも数回上演されている．

ところでコペンハーゲンにおけるボーアとシュレーディンガー間の討論については，ハイゼンベルクが前出の「自伝」の中で[2]，二人の対話形式にしてまとめている．そこでこの対話を借用かつ転用し，それにフレインふうの味付けを施して，一幕一場の仮想劇「病室にて」を書いてみた．紙幅制限のため，以下にその短縮版を紹介する．

■ 4.「病室にて」 ■

とき：1926 年 10 月 x 日（$5 < x \lesssim 10$）午後．ところ：ニールス・ボーア研究所構内ヴィラ二階の一室．登場人物：ボーア（B），シュレーディンガー（S），マーグレーテ夫人（M），通行人にハイゼンベルク．ボーア病臥中のシュレーディンガーを見舞うため病室にやってくる．

B　シュレーディンガーさん，お風邪は如何ですか．

S　まあ，少しはよくなったようです．

B　それを聞いて安心しました．何分にもこの時期のコペンハーゲンは気候がよくないもので．それにしましても，このたびのあなたの新理論は全く素晴らしいものですね．深い感銘を受けました．さすがはウィーンのお方，それは一つの芸術作品でもあります．クリムトの華麗さ，シーレの斬新さを漂わせながら，しかも全体がワーグナー建築のような古典的端正さを具えています．まさに世紀の大論文ですね．

S　過分のお言葉，おそれ入ります．

B　しかしその反面，私には納得のゆかない点も多々あります．

そう言いながらボーアはベッドの片隅に腰を下ろす．どうやら長期戦の気配である．

S　それは当然でしょう．私たちの立場は，出発点からして大違いのようですから．もし私の理論が美しいといえるのでしたら，その最大の理由は，あなた方のように，量子飛躍などという不恰好な代物をもち込まなくても済むからでしょう．それはともかく，私にもあなた方の原子模型で理解しかねる点が沢山あります．

B　つまり私たちは基本的な点で，お互い理解し合えていないということのようですね．私たちはですからあらゆる機会を利用して，徹底的に話し合わなくてはならないのです．

S　……

B　ただその際に，一つ忘れてはならないことがあります．私たち双方の考え方には，それぞれ長所もあれば短所もあります．そういうわけで，一方が正しくて他方が間違いだとする可能性の他に，双方の長所を採り入れる第三の可能性があることにも留意しておかねばなりません．

S　では私のほうから質問させて頂きましょう．まずあなた方は，粒子としての電子が一定のエネルギーを保ちながら，原子核の周りを廻っているとおっしゃいます．何ら電磁波を放射しないで，どうしてそのような運動が可能となるのですか．それでは電磁気学の原理に反します．もう一つ，電子がエネルギー E_1 の軌道から $E_2\ (< E_1)$ の軌道へ量子飛躍するとおっしゃいますが，この飛躍は徐々に起こるのか，それとも突然に起こるのか，一体，どちらなのですか．もし徐々にだとしますと，電子は次第にエネルギーを失い，それに応じた振動数の光を放射しなくてはなりません．それではスペクトル中に鋭い輝線を期待できないでしょう．他方，飛躍が突然起こるのだとしますと，電子は確かに振動数 $\nu = (E_1 - E_2)/h$ の光子を放射するでしょう．しかしその際電子はどのように運動するのですか，その説明が全くありません．電子は予め自分の行き先を知っているかのようにも見えます．その説明のために，さらに奇怪な‘BKS 場’などをもち出さないで下さい[4]．

B　あなたのご指摘は全くごもっともです．しかしそれは，量子飛躍があり得ないということの証明にはなっていません．それはただ，私たちの言葉や概念が量子的世界の記述にはもはや適していない，ということをまさに示しているのです．私たちは新しい物理的現実に直面しているわけですから，それに相応した新しい言葉や概念を必要としているのです．

S　私はここであなたと言葉や概念構成についての哲学的論争をしようとは思いません．私はただ，原子の内部で物理的に何が起こっているのかを知りたいだけなのです．

B　おやおや，マッハやウィーン学派の哲学者たちを生んだ都市（まち）ご出身——とは到底思えないようなお言葉ですね．そもそも昔トムソンが発見し，ローレンツが論じた電子も，いまあなたや私が問題にしている電子も，電子自体に何ら変りはありません．電子が最近になって古典的行状を悔い改め，突如量子的行動を始めたわけでは決してありません．ですから変るべきなのは，つまり量子化されるべきなのは，私たち自身なのです[5]．たとえ哲学がお嫌いでも——私は決してそうとは思いませんが——少なくともこのことだけは，あなたにも認めて頂かなくてはなりません．

ボーアがここで余りにも大きな声を出したので，たまたま廊下を歩いていたハイゼンベルクもびっくりする．

B　それはそれとしまして，量子飛躍という言葉がお嫌いなのでしたら，それなしであなたは原子の特徴を，一体，どのように説明しようとなさるのですか．

S　エネルギーが E_1, E_2 に対応する波動関数をそれぞれ φ_1, φ_2 としましょう．$t=0$ で φ_1 だった波動関数が，t とともに φ_2 の成分が加わって φ_1, φ_2 の一次結合となり，$t=T$ では φ_1 の成分が消え φ_2 だけになる，というような連続的変化は容易に考えられます．ですから，あなた方が量子飛躍に帰着されている光の放射も——これについてはまだ詳しく調べてはいませんが——何れごく自然な形で解決されるだろうと期待しています．あなた流に申しますと，新しい言葉‘物質波’を用いますと，様相はこのように一変するのです．

B　いいえ，それは正しくありません．ただ事の本質を隠蔽しているに過ぎません．とにかくですね…

ここでマーグレーテ夫人が，室内の偵察を兼ねて，お茶とお菓子をもって入ってくる．そしてシュレーディンガーに向かって

M　3時のお茶をどうぞ．

シュレーディンガーは，会釈をしただけでお茶を飲み始める．話の腰を折られたボーアは仕方なく立ち上がって窓辺にゆき，窓外の公園を見やりながらブツブツ呟いている．間もなくお茶を終えたシュレーディンガーは夫人に向かって

S　さすがは本場のデェニイッシュ・ペイストリー，美味しく頂きました．

これに笑顔で応えた夫人が後片付けをして退出すると，ボーア再びベッドの傍らに戻り口を開く．

B　とにかくですね，あなたは議論のどこかで不連続性を導入しなくてはならないのです．プランクの公式に対するアインシュタイン流の導出法を思い出して下さい．そこでは，電子が離散的なエネルギー値を取るだけではなく，それらのエネルギー値の間を不連続的に遷移することが決定的に重要です．ですからあなた

の理論でも，どこかでこうした不連続性を導入しなくてはなりません．

S　私はまだ波動論と統計力学との関係を十分に検討してはおりません．しかしゆくゆくはプランクの公式も，おそらくこれまでとは全く違った仕方で導き出せるだろうと期待しています．

B　いいえ，そういう期待は決して叶えられないでしょう．そもそも量子物理には，理論的にも実験的にも，1/4 世紀にも及ぶ蓄積があります．理論のあれこれはしばらく措くとしましても，実験面ではシンチレーション検出器とかウィルソン霧箱の中で，私たちは量子飛躍的現象を直接観ることができるのです．こういう現実を無視することは到底許されません．

S　そんなグロテスクな量子飛躍といった代物から逃れられないのでしたら，私は量子論の分野へ入り込んだことを大変残念に思います．

B　いえいえ，あなたが波動力学を創り出して下さったことに，私たちは心から感謝しているのです．それは数学的明快さと簡潔さにおいて，私たちの量子論より遥かに優れており，量子論に新しい視点を与えることは明らかです．

　ボーアの病気見舞が長くなり過ぎたのを心配したマーグレーテ夫人が再び入室し，ボーアに告げる．

M　ニールセンさんが大学本部の委員会に出掛けましょうと，もう下でお待ちです．

　ようやく腰を上げたボーアは

B　もう一つ，あなたの ψ–関数の物理的意味についてもお聞きしたかったのですが，またのときに致しましょう．どうぞお大事に．

　ボーア，ドアの近くまで歩を運ぶが，再び振り返り

B　それにしましてもあなたの理論はシェーンです，ヴンダーバーです．それではシェーネン・ターグ・ノッホ！

　ボーア退室．シュレーディンガーようやく解放されてヤレヤレの風情，疲れたので一眠りしようと目を閉じる．照明が落とされて幕．

■　5. 余波コペンハーゲン解釈を生む　■

　このようにシュレーディンガーとボーアは，結局，互いに理解し合えないままで別れることとなる．これは，いまから見れば，むしろ当然の結末といえる．両者とも，さらには当時の何人も，量子論に対して首尾一貫した解釈をもち合わせていなかったからである．この訪問は，しかしながら，双方に大きな影響を残す．

　実際，シュレーディンガーはボーアの人間性に深い感銘を受けたようで，ウィーン宛の手紙（1926.10.21付）[6)]の中で，“ボーアは半神ともいうべき存在であるのに，大変親切で思いやりがあり，決して謙虚で図々しさがないとはいえないまでも，見習い僧のように恥ずかしがりやで…” とその印象を伝えている．他方ボーアは，波動力学のほうが古典論との対応が見易く，そこから量子論の新しい側面が見えてくるのでは，と思い始める．これはハイゼンベルクが，波動力学の有用さは認めつつも，なお行列力学の優越性を示し続けようとした態度とは対照的である．

　何れにせよ，シュレーディンガー衝撃の余波は，この両者に，解釈問題こそが量子論の緊急課題であることを再認識させ，その解決を強く迫ることとなる．おそらくこれに続く数カ月は，二人の天才ボーアとハイゼンベルクの共同研究が，集中・緊張・充実・持続のあらゆる面で最高潮に達したときではなかろうか．

　この時期，二人はともに研究所構内に住んでいたので，夜な夜なボーアはC棟3階にハイゼンベルクを訪ね，議論を重ねるのであった．それはしばしば深更にも及んだという．この際両者の採った基本的方法は，問題を直接理論的に考察するのではなく，適当な思考実験を案出し，これを量子論的に分析することにあった．因みにこうした思考（のみならず実際の）実験装置の発案こそ，ボーアのまさに特技とするところであった．しかしながら両者の問題意識に関しては，大きな懸隔があった．ボーアにおいては，粒子・波動の両概念をどのように両立させるのか，さらには，量子現象の記述を可能にするような言語や概念はどのようなものか，が最大の関心事であった．つまりはボーアのいわゆる ‘量子力学の認識論的問題’ である．これに対してハイゼンベルクは，すでに確立された（と考えられる）理論の数学的形式を発想の基礎においた．思考実験の分析においても，理論が許す観測可能量とは何か，というふうに問題を捉えた．この考え方は，実は，前年にその逆を主張したとき，アインシュタインから教え諭されたことに他ならない．

　‘合宿’ しての共同研究は，それが順調である間はよいが，困難に遭遇したような場合には逆の効果をもつ．ボーアは物理的解釈を理論の外から付け加えようとし，反対にハイゼンベルクは，理論の（数学的構造の）中から導き出そうとした．こうした考え方の相違は，次第に両者間に気まずさを生むこととなる．議論すればするほど，困難はただ煮詰まってゆくように思えた．

そこでボーアは，翌27年2月，気分転換のためノルウェーへスキーに出掛ける．そしてこの暫時の別行動が好結果に繋がる．

4週間のスキー中に，ボーアは粒子像と波動像を統一する‘相補性’の構想に到達し，一方のハイゼンベルクはかの不確定性関係 $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim h$ を発見していたのである．ここに相補性とは，‘互いに対立する概念を適当な仕方で併立させることにより，初めて問題の全体像が把握される’，とする考え方である．

この二つの結果をどのようにまとめるのか，さらに議論が続いたが，6月になってパウリがコペンハーゲンにやってきて議論に加わり，ようやく二人は共通理解に達することができた．賢者パウリの裁定がこの際も物を言ったのである．すなわち‘コペンハーゲン（あるいは標準的）解釈’の成立である．ここでのボーアの最大の寄与は，‘(例えば）電子は粒子なのか，あるいは波動なのか’といった設問は量子論では意味がなく，正しくは‘電子はどのような状況下で粒子として，あるいは波動として，さらには一般の仕方で振舞うのか’と問うべきである，としたことにある．

この解釈は以下のようにまとめられる．‘系の状態 $|\ \rangle$ に対して任意の物理量 A（その固有値，固有状態をそれぞれ $a_i, |a_i\rangle$ とする，$i=1,2,\cdots$）を観測したとき，観測値 a_i の得られる確率は $|\langle a_i|\ \rangle|^2$ であり，この観測値の得られた直後の系の状態は $|a_i\rangle$ に転化している’．このようにして，対象とする系は，観測の仕方（A の選択）に応じた振舞いを示すこととなる．観測に伴う状態の変化，いわゆる‘波束の収縮’ $|\ \rangle \to |a_i\rangle$ の中に，ボーアやハイゼンベルクの固執した不連続変化が実現している．

上の結果をボーアはヴォルタ没後百周年記念の国際会議（1927.9.16 於コモ湖畔）で発表したが，“いつものようなボーア教のご託宣”と評されたように，聴衆には充分理解されなかったようである．おそらくは“ボーアは考えるときは明晰だが，書くものは（従ってこの講演原稿も）不分明”（アインシュタイン）[7]だったのかもしれない．

小稿冒頭で述べた理由から，‘物理的解釈’の最終的総括を行ったコモ講演でもって，量子論は初めて‘量子力学’と呼ぶに値する物理理論となり得た，とするのは如何であろうか．もしこの説に賛同が得られるならば，学術的にも，そして個人的にも，甚だ喜ばしいのである．量子力学と筆者は全く同年齢（ただし誤差3日）となるからである．

■ 6. 何故波源を離れたのか ■

周知のように，その後のシュレーディンガーは量子力学研究の第一線から身を退いた．それは何故か．これは難問であると同時に，複雑・微妙な要素を含んでおり，その解答もまた複雑・微妙たらざるを得ない．それ故，現時点での筆者の解答も――勿論憶測の域を出るものではないが――いくつかの可能性の間で揺れ動いている．

(1) まず，プランクやアインシュタインと同じく，コペンハーゲン解釈を受け入れ難かったことがあろう．とくに確率的解釈や波束の収縮といった理論への添加物が，理論の端正さを損ねる‘見苦しい’ものとして，彼の眼に映ったのではないか．あるいは何れ時がくれば，自らの好む方向に問題が解決されるだろうとの楽観的期待あるいは確信があったのかもしれない．

(2) ボルン宛の手紙（1946）[8]で，“私には科学の美を追求することが至上の目的です．美は私にとって科学以前のものです”と書いている．つまり彼においては，‘美ならざるは理論に非ず’であったろう．キプロス島の王ピグマリオンは，自ら象牙に彫り込んだ女性像の美しさに魅せられ，惚れ込み，身をやつし，…とギリシャ神話にはある．シュレーディンガーを継いで「ダブリン高等研究所」理論物理部門の長となったJ.L.シング教授は，この物語に因んで，‘自分の作った理論が，たとえ実証の見込みがなくとも，あるいは多少の欠陥があっても，なおそれに執着して研究し続けること’を戒めて，これを‘ピグマリオン症’と呼んだ．シュレーディンガーの波動力学に対する態度にも，シングとはまた別の意味ではあるが，ピグマリオン症的なところがあったのではないか．彼の彫刻は美し過ぎて，さらに鑿を加える気には到底なれなかったのであろう．件の神話の場合，彫刻には後に美の女神アフロディテによって息が吹き込まれるのであるが，波動力学の場合は如何であろうか．女神の役を果たすのは，あるいは美しい観測理論なのかもしれない．

(3) コペンハーゲン学派は，長年にわたり，量子論研究の，いわば熾烈な地上戦を戦ってきた．そこには敵を最後まで追いつめねば止まぬ，執拗なまでの徹底さ・一途さがあった．これに反してシュレーディンガーの場合は，突如（1925年11月頃か）落下傘降下してこの戦闘に参画したかに見える．それ故，もし戦況不利となれば，直ちに他の戦場に転進することも選択肢の一つであったろう．要するに，彼の態度の中には，一

途さとは対極的な‘ゆるやかさ’——ウィーン気質の現れか——があったように筆者には思える．ヨーロッパで長距離列車に乗っていると，ドイツ国内では時刻表どおりに運行するが，オーストリアに入るや遅れが目立ち始める——そういった類の‘ゆるやかさ’である．因みにこの傾向は，彼の生き方全般にも妥当するのではなかろうか．

(4)　コペンハーゲン解釈は，上述のような技術面における‘見苦しさ’以上のものをも含んでいる．本来，物理法則とは物理的実在そのもの——客体——に対する絶対的な規則性を意味するものであった．しかし新しい量子力学解釈における法則は，物理的対象と人間（観測者）——客体と主体——との相対的な関係を律するものとなっている．まさに法則概念におけるコペルニクス的転回である．自然（世界）記述におけるこのような主客の分離・対立こそ，シュレーディンガーのもっとも忌み嫌うところではなかったのか．とくに晩年の彼は，世界と自我の一体性，一元論的世界観，さらには梵我一如の境地をすら希求し続けたのであるから[9]．

(5)　畢竟するに，プランクやアインシュタインやシュレーディンガーのように，伝統的物理学の蘊奥を窮めたような人々にとって，全く異質の量子論的思考に与することは，常人などの場合に比して，遥かに困難なことであったに相違ない．そもそも人間は，そう易々と己れの思想を変え得るものではない．そのプランクに次の言葉がある．“新しい科学的真理が勝利を収めるのは，反対者を説得して新しい光が見えるように転向させることによってではない．ゆくゆくは反対者が死に，新しい考え方に慣れた若い世代が育ってくるからである”[10]．

本稿を草するに際し，種々の資料を貸・供与して下さった小林澈郎・西尾成子・関口宗男の諸氏に謝意を表したい．

参考文献

1) A. Pais, “*Niels Bohr's Times*”, Clarendon Press (1991) p.240.
2) W. ハイゼンベルク，『部分と全体』，山崎和夫訳，みすず書房（1974）pp.120–124.
3) 堀健夫，理研 OB 会会報，第 22 号（1986.4），仁科記念財団，p.6.
4) N. Bohr, H.A. Kramers and J.C. Slater, *Phil. Mag.* **47** (1924), p.785.
5) この趣旨の言葉は，“*Niels Bohr*” A.P. French 他編，Harvard Univ. Press (1985) 中の A. Petersen の稿，p.305 にある．
6) J. Mehra and H. Rechenberg, “*The Historical Development of Quantum Theory*”, Springer–Verlag (1987), Vol.**5**, Part 2, p.825.
7) 文献 1)，p.431.
8) W. ムーア，『シュレーディンガー その生涯と思想』，小林澈郎・土佐幸子訳，培風館（1995）p.480.
9) 中村量空，『シュレーディンガーの思索と生涯』，工作舎（1993），とくに第 6 章.
10) B. グレゴリー，『物理と実在』，拙訳，丸善 (1993) p.106.

（かめふち・すすむ，筑波大学名誉教授）

解析学とシュレーディンガー



磯崎　洋

1. 数学と物理学の共鳴

1920 年代後半に**量子力学**の原理が確立し，1932 年に相次いで**函数解析学**の記念碑的労作が出版されたのは，物理と数学が相互に影響し合いながら大きな発展を遂げた例としてよく言及される．しかしよく眺めれば，これはそれほど単純なことではない．19 世紀後半から生じた大きな数学のうねりと物理学とが響き合って一つの峰を作り，後に影響を及ぼし続けていると思われるからである．

函数解析学の基礎を築いた S. Banach の本は最初ポーランド語で[4]，ついでフランス語で[5] 出版された．序文には無限次元における作用素の概念について Volterra が引用されているが，量子力学に関する記述はない．Banach は閉グラフ定理を用いた偏微分方程式の解の初期値に対する連続性に関する有名な定理を残しているが，自身の関心は抽象数学にあったようで，Banach の論文の中には数理物理学の問題を扱ったものは見当たらない．Stone の本[7] の序文では，Volterra, Fréchet, Banach 等の函数解析学の成果を引用しつつ，Weyl[2]，Dirac[3]，von Neumann[6]等の著作に言及しているから，はっきりと量子力学を意識している．しかし本文では常微分作用素の固有函数展開に関連して「量子力学におけるシュレーディンガー作用素はこの種の作用素を扱っている」という記述が 1 行あるのみである．von Neumann の本[6] は文字通り量子力学の公理的基礎に係るもので個々のシュレーディンガー方程式を論ずるものではない．これらの仕事は量子力学に伴う数学的問題の第一段階の基礎を築いたものでそれ自身極めて大きなことなのだが，それですべてが解決されたのではない．考えるべき方向は定まったものの，実際に内容が伴うにはなお多くの努力が必要であった．

2. 固有値問題

量子力学の基礎は固有値問題にある．固有値問題の歴史は際限なく遡り得る可能性があるから簡単に言及できることではないのだが，ここでの話題に関連したものに限定すれば，まず 20 世紀初頭の Hilbert–Schmidt の**線形積分方程式論**をあげるべきであろう．この仕事の母体となったのはラプラス方程式の境界値問題である．1 次元の場合と異なり多次元の場合の楕円型偏微分方程式の境界値問題は境界全体での大域的な問題の性格をおびていることが次第に認識され，最終的には Fredholm による線形積分方程式の理論によって解決された．この Fredholm の仕事を Hilbert のセミナーで紹介したのは偏微分方程式の解の一意性の定理で有名な Holmgren のようである[10]．Hilbert と Schmidt はこの問題の中にある無限次元線形代数の構造に注目し今日の**ヒルベルト空間論**の土台を構築した．彼らはすべて無限数列の空間（l^2）の中で記述した．こうして積分方程式の函数解析的取扱いの基礎が築かれた後にもたらされた Heisenberg らに

よる**行列力学**は直ちに彼らのいたGöttingenでの数学の研究対象となったようで，函数解析学的手法による量子力学の研究を目的とするセミナーが開かれていたようである．彼らの基本的アイディアは無限次元行列でありその成果は1冊の著書にまとめられた．しかし後述するT. Kato（加藤敏夫）はA. Wintnerの本*Spektraltheorie der Unendlichen Matrizen* (1929) を評して「この本でWintnerは行列力学の数学的基礎付けを意図したようであるが，結果においては，無限行列が如何に御し難いものであるかを示すことに終わっている．今日ではこの本の存在すら知る人は少ない．無限行列の救い難いことはvon Neumannが*J. Reine Angew. Math.* **161** (1929), 208で徹底的に究明している．行列という具体的なものから作用素という抽象的なものへの移行は，一見小さいようで実は巨大な一歩であった．von Neumannなくしてこの前進が可能であったかどうか疑わしい．」と述べている[13]．von Neumannがセミナーにおいて彼自身による抽象ヒルベルト空間の枠組みの中で議論を展開しているときに，Schmidtが「すまないが，l^2 で論じてくれないかね」と尋ねたという話を聞いたことがある．よくできた冗談かもしれないが，基本的な考え方を変えることは達人にすら易しいことではない．

3. 微分方程式の固有値問題

Schrödingerは「固有値問題としての量子化」という題で4つの論文を発表している[11]．論文の表題そのものが，彼の仕事の本質を表している．しかし固有値問題は行列力学においても現れるのだから，むしろ「微分方程式の固有値問題としての量子化」とするほうが彼の意図をよく表すことになる．そしてこの「微分方程式の固有値問題」は当時，すでによく理解されている問題であった．Schrödingerの考え方が受け入れられたのはこのことによっているのであろう．1924年には今日よく知られているクーラン・ヒルベルト『数理物理学の方法』[1]の初版が出版されている．量子力学の成立以前の前期量子論においても固有値問題は登場している．その最も重要な例が黒体輻射の問題で，これは古典物理学を基礎とするものだが，有界な領域内でのラプラシアンの固有値の漸近分布を求める問題となりH. Weyl（むしろCourant）によるミニ・マックス原理によって解決された．この固有値の漸近分布の仕事はその後多くの問題に拡張され続けている．クーラン・ヒルベルトの『数理物理学の方法』は固有値問題を軸に物理学に現れる微分方程式の取扱いを広くまとめたものである．Schrödingerも熟読したに相違なく，論文の中で頻繁に引用される．

固有値問題としての量子化・第1部の2頁目に水素原子に対するシュレーディンガー方程式が現れ，直ちにそれが変数分離法で解かれる．動径方向はよく知られた合流型微分方程式であり，Schrödingerはその扱い方をWeylに教わったと述べている．解を複素積分で表示し（おそらく鞍点法によって）漸近展開を行って解の挙動を導くのだが，Schrödingerはこの方法をSchlesingerの教科書*Differentialgleichungen* (1900) によって身につけたらしい．また第4部では摂動論を展開するにあたって連続スペクトルに対応する固有函数系までこめて完全系をなすことを基礎にするのだが，これらのこともWeylに教わったようである．Weylはこのとき既に常微分作用素に関する固有函数展開理論を築いていたのであるが，Schrödingerの質問をどのように感じていたのであろうか？ この頃は偏微分方程式に関する固有函数展開理論は存在していなかった．Weylは巨人であり，相対性理論はもとより量子物理学においても重要な仕事を残している．彼の関心は個々の方程式というよりは例えば対称性のような量子力学の背後にある数学的構造にあったと思われる[2]．

固有値問題としての量子化・第2部の主題はハミルトン力学に基づいた幾何光学と量子力学との対比である．哲学的思考を好んでいたSchrödingerは，物体の運動学とは異なった観点からの力学，相空間の中での正準変換の連続的な結合による力学の理解に多大な関心を持っていたに違いない．論

文の脚注には F. Klein が力学の講義の中でハミルトン・ヤコービの理論と高次元非ユークリッド空間における準光学的考察を行い，ある研究集会で両者の対応関係を強調したのだが大して注目が得られなかった，という話を Sommerfeld から聞いたことが述べられている．

解析力学は常微分方程式論としての古典力学の集大成といえよう．これを自在に駆使するにはかなり深い微積分学の知識を必要とする．その頃の解説を見ると，当時は現在よりも数学の授業が多かったように見受けられる．物理学科においても毎日，数学の講義と演習があったのではないかと思われる[14)]．実際の講義内容は推測するしかないが，例えば Sommerfeld の教科書『理論物理学講座』はミュンヘン大学で行われた講義に即しているのであろうが，1 学期を半年として第 4 学期から第 8 学期まで週に 4 回行われ，さらに週 2 時間の演習があったようである．内容は力学・変形体の力学・電磁気学・光学・熱力学および統計力学・物理数学（偏微分方程式論）となっている．Sommerfeld の数学の理解は深くその教科書も正確かつ明快である．しばらく前になるが，旧制大学の工学部で学ばれた方が微分方程式の聴講に来られたことがある．戦争中でノートやインクが貴重品であり，見せていただいた昔の講義ノートは余白までびっしりと埋められていたが，その内容はかなり高程度のものであった．数学の授業で求める水準は昔のほうが高かったことは疑いない．さらに遡ればSchrödinger が解析学に堪能であったのも時代を反映しているのではなかろうか？

30 年以上前になるが，筆者は長距離型のポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素の散乱の研究に関連してこの論文「固有値問題としての量子化・第 2 部」を日夜眺めていたことがある．シュレーディンガー方程式の解を積分表示し定常位相の方法によって漸近形を計算すれば，相函数がハミルトン・ヤコービの方程式の解から幾何光学におけるアイコナール方程式の解に変わる，という計算が意味することを探しているうちにこの論文にたどりついたのだが，Schrödinger が繰り広げる洞察を読みながら大河の岸に立って歴史の流れを見ているような思いであった．

量子化を幾何学的立場から説明しようとする努力は現在も続けられている．それだけの魅力があるからなのだが，それは解析力学や変分法が数学の深い部分に根ざしていることから来るものであり，**古典力学・幾何光学・波動力学**の対応は今後も想像力を刺激し続けるように思われる．

4. 方程式に伴う困難

しかし Stone や von Neumann の著作から分かるようにシュレーディンガー方程式の数学的研究そのものはすぐには発展しなかった．ここで例をあげてみよう．水素原子に対する固有値問題を具体的に解けば，基底状態の固有函数は $e^{-c|x|}$ という形になるのであった．この函数は $x = 0$ において微分可能ではない．2 個の電子が 1 個の核子に結合している状態を記述するシュレーディンガー作用素は x, y を 3 次元の変数として（適当な単位系で）$H = H_0 + V$，ただし $H_0 = -\Delta_x - \Delta_y$，$V = -1/|x| - 1/|y| + C/|x-y|$ と書ける．ここで Δ_x, Δ_y は x, y 変数に関するラプラシアンである．固有値問題 $H\psi = E\psi$ の解 $\psi = \psi(x, y)$ はどのような性質を持つであろうか？ H_0 は x, y に関する 2 階の微分を含んでいるから $\psi(x, y)$ は x, y に関して 2 回連続的微分可能であることが望ましい．しかしこのとき $H_0\psi - E\psi$ は x, y の連続函数であるが，$V\psi$ は $x = 0$ または $y = 0$ のところで $1/|x|$ あるいは $1/|y|$ のような特異性を持つ．これは ψ が x, y の 2 回連続的微分可能な函数ではないことを意味しているのではなかろうか？ 水素原子の固有函数の例はこのことを示唆しているように思われる．すなわち H を扱うには $x = 0, y = 0$ において特異性のある函数も許容できなくてはならないのではないか？ このように典型的な例をとってみても古典的な微積分学の知識だけではシュレーディンガー方程式を解析できないのである．

量子力学における固有値問題は**楕円型偏微分方

程式を扱う．常微分方程式に対しては初期値問題を考えることによる解の構成法が知られており，たとえ具体的に解を書き下すことができなくても古典的な手法で解の存在や性質を論ずることができる．しかし楕円型偏微分方程式はそのような初期値問題的手法では解けないということは当時の共通認識であったであろう．波動方程式に対しては初期値問題を考えることができるが，それは無限次元空間に値をとる函数に対する初期値問題であるから常微分方程式論の枠組みの外にあるものである．シュレーディンガー方程式の取扱いが困難なのは偏微分方程式だからである．そしてそれは函数解析学で得られていた概念を実際の問題に具体化することを必要とした．

Weyl はすでに 1909 年に本質的スペクトルの摂動に関する定理を述べているから，その頃には数学の中で**スペクトル**に関する基本概念はでき上がっていたと思われる．量子力学ではスペクトルは物理量にあたるから実数でなくてはならない．それは考える作用素が単なる対称作用素ではなく自己共役作用素でなくてはならないことを意味する．考えている作用素が偏微分作用素から作られたものである場合には自己共役性は偏微分方程式の解の存在と同値である．自己共役作用素の構成は作用素の定義域を如何に定めるかという問題なのだが，上で与えた例から分かるようにそれは古典的な解析学だけではすまない問題であった．von Neumann は対称作用素の拡大と自己共役作用素の構成の一般的原理を得ていたが，それを具体的な問題に適用するにはまだ道具が不足していたのである．

微分の概念を一般化する弱微分，強微分の考え方は 1930 年代の後半に Sobolev や Friedrichs によって与えられた．函数空間の埋め込みに関する Sobolev の不等式が現れたのもこの頃である．これは微分方程式の側から言えばいわゆる弱解を考えることであるが，函数解析の立場から言えば共役作用素を考えることに相当する．このような解析学的準備なくしては具体的なシュレーディンガー作用素の数学的研究は難しい．

5. Kato の仕事

F. Rellich は 1930 年代後半から 40 年代にかけてスペクトルの**摂動論**に関する重要な仕事をしている[8)]．シュタルク効果などの量子力学の問題における固有値の摂動に関する数学的に厳密な議論と，連続スペクトルを記述する固有函数の無限遠における挙動に関する定理が残されている．これらが Kato の研究の源泉となった．

Kato はそれまでの von Neumann 等の研究を調べているうちに，量子力学の数学的構造は解明されたものの個々の現象の数学的研究はほとんどなされていないことに気づいた．シュレーディンガー作用素は 2 階の微分作用素であり，例えば有界な領域で考えるときには適切な境界条件をつけなければ自己共役にならないことは直ちに分かる．3 次元空間全体で考えるときには無限遠における函数の挙動を制限することが境界条件に相当するのだろうが，それはどのようなものであろうか？あるいはクーロンポテンシャルのように特異点をもったポテンシャルを扱うときには定義域の函数はどのようなものであろうか？ このような基本的な問題に答えが出たのは 1944 年頃であったらしい．諸般の事情で出版は 1951 年まで持ち越され，“Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type” という題名の論文となって発表された[9)]．問題の所在，意義等を述べた後，本題に入り，フーリエ解析と函数解析の基礎事項のみを用いて，先人の結果に依りかかることなしに，原子・分子等に対するハミルトニアンは自然な定義域の上で自己共役であることが示されている．Kato がさらに進んだ考察を進めていることは文中から明らかで，ディラック作用素の自己共役性は原子番号に依存するであろうこと，ゼーマン効果やシュタルク効果は別の考察を必要とすることが述べられ，さらに Rellich とは異なった形で摂動論を展開できることが予告されている．この論文に続いて同じ *Trans. AMS* の雑誌にヘリウム原子の固有値の個数の評価が発表されている．Kato のこの仕事はシュレーディンガー作用

素が数学的対象として自然なものであり，物理的に期待されていることが疑問の余地なく実現されていることを示した．シュレーディンガー作用素の数学的研究はここに始まったといってよい．S. Tomonaga（朝永振一郎）の繰り込み理論も，Kato の研究も戦争中で他国との情報交換が不自由だった中でその実質が成し遂げられている．問題意識を深めた上で独自に思索することの重要性を教えてくれるものだが，それは簡単にできるものではない．

6. 発展

ヤンマーの量子力学史[12] はややもすれば英雄譚に傾きがちな量子力学の研究の歴史を数学の立場からも解説しようと試みている．量子統計力学の発展は大きすぎる話題としてさておいて，ヤンマーの記述もシュレーディンガー方程式の数学的研究としては 1950 年代の Cook, Hack, Jauch, Kuroda 等による（時間依存）波動作用素の存在証明のあたりで話を終わらせている．それ以後の研究の歴史を簡単にたどってみよう．

物理学の問題から数学的エッセンスが抜き出された後は数学は独自に進んでいくのが普通である．1950 年代以降のシュレーディンガー方程式の数学的研究は目覚ましいものであった．1950 年の世界数学者会議では Rellich が「スペクトル解析における摂動論」という題で離散固有値と固有ベクトルの挙動について講演している．1970 年のニースでのコングレスでは Kato が「**散乱理論**と連続スペクトルの摂動」という講演をしている．1990 年の京都コングレスでは I.M. Sigal が「多粒子系の量子力学」という題で講演している．これらの講演題目がその頃に大きな注目を集めていた問題を表していると考えてよい．また**逆問題**における Gel'fand–Levitan–Marchenko の理論，KdV 方程式に関連して大発展を遂げたソリトン理論，半古典近似の問題，共鳴状態，ランダム系，さらにはグラフや樹状図形上のラプラシアンの問題等，シュレーディンガー方程式はこの約 60 年間に解析学の研究に重要な話題を提供し続けてきた．

多少，技術的な話になるが，その中で私にとって特に印象深いのは V. Enss が与えた時間依存的方法による波動作用素の漸近完全性の証明と，E. Mourre による交換子によるシュレーディンガー方程式の解の評価法であった．1970 年代最後から 1980 年代前半にかけて発表されたものである．前者は散乱する粒子は時間が経過するにつれて古典軌道に沿って運動するという物理的直観をそのまま証明の基本方針とするもので，アイディアの鮮やかさによって多くの研究者によって支持され，短時日のうちに大きな隆盛を見た．数学として考えても相空間において偏微分方程式の解を位置と運動量の関係に基づいて考慮する超局所解析の手法が散乱問題の研究に極めて有効であることを立証した点において意義深い．この頃並行して超局所解析による半古典近似の理論が大きな進展を見た．しかし，単に数学的技巧のみで数理物理的研究ができるわけではない．多体系の散乱においては超局所解析の数学的手法以前に多粒子系のシュレーディンガー作用素自身を深く解析する必要があった．Mourre の方法は作用素の正準交換関係がシュレーディンガー方程式の解析に占める役割を再認識させた重要な手法であった．これなしでは多体問題の解決は不可能であった．

7. 粒子像と波動像

シュレーディンガー方程式の解として得られる波動函数が表すものは何か？ という問題は物理的に深刻な問題を含んでいる．水素原子の固有状態に対応する固有函数は無限遠で指数的に減衰することから，波動函数は粒子としての様子を表していると考えるのは自然である．しかし連続スペクトルに対応する固有函数はむしろ空間全体に拡がったものであり，粒子像とは矛盾する．その後研究が進展するにつれて次のことが明らかになってきた．水素原子に限らず一般に固有状態に対応する固有函数は指数的に減衰している．一方，散乱状態を記述するシュレーディンガー方程式の解は幾何光

学の手法を用いてよく表現される．このことは量子力学が主張する粒子像と波動像の二重性がシュレーディンガー方程式に内在していることを意味している．実験技術の飛躍的な進歩によって量子力学における粒子性と波動性の二重構造を眼に見ることのできる時代になったが，数学においても同様のことが言えるのである．Schrödinger がどこまで見通していたかは知るよしもないが，シュレーディンガー方程式は量子現象を数学的によく記述するものであった．

以前はこのように言われていた記憶がある $\cdots$ 電子は 3 次元空間を動くものだから 2 次元のシュレーディンガー方程式は無意味である．まして多様体上のシュレーディンガー方程式などは数学的ゲームである $\cdots$ しかし半導体の発展によって電子を薄い層に閉じ込めることが可能になると 2 次元シュレーディンガー方程式は現実世界の主役となった．また量子細線を考えれば，曲った曲線の中でのシュレーディンガー作用素も現実を表すものであることが分かる．量子力学の教科書も，現在では古典物理との違いに当惑することなしに，量子現象をそのまま認めることから出発する，という書き方が増えているように思われる．今日ではシュレーディンガー方程式は数学の中で完全に認められた存在となった．そのため，数学の立場からは，その物理的な意味を問わずに単に与えられた数学の対象として扱う研究者も多くなってきているように思われる．これはやむを得ないことなのだが，常に心のどこかに物理的出発点と最初の問題意識をとどめておくことは重要であろう．意味のある研究の発展はそのようなところから出て来るように思われる．

Schrödinger は相対論的電子論のために相対論的波動方程式を考えたが，実験事実との照合の結果，非相対論的なところまで話を引き戻さなくてはならなかったようである[14]．それが今日いうところのシュレーディンガー方程式である．また Enss 自身から聞いたことだが，Enss は彼の時間依存的描像を量子場の理論に用いるつもりであったが，それは果たせず非相対論的散乱現象に適用した，とのことである．これらのことは量子物理学の数学的基礎や数理物理学の研究に深い示唆を与えているように思われるのだが，それは簡単には論じられない問題である．確かなことは，すぐれたアイディアは常に新しい領域，未知の領域を目指すことによって生まれてくるということであろう．

参考文献

1) R. Courant und D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik* (1924).
2) H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanique* (1928).
3) P.A.M. Dirac, *The Principle of Quantum Mechanics* (1930).
4) S. Banach, *Teorja Operacyj, Tom 1: Operacje linjowe*, Warsaw (1931).
5) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (1932).
6) J.v. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanique* (1932).
7) M.H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis* (1932).
8) F. Rellich, *Math. Ann.* **116** (1939), 555–570.
9) T. Kato, *Trans. Amer. Math. Soc.* **70**, 195–211; 212–218 (1951).
10) H. Weyl, *Gesammelte Abhandlungen, Band IV*, p.163, Springer–Verlag (1968).
11) 湯川秀樹監修，田中正・南政次共訳『シュレーディンガー選集 1　波動力学論文集』共立出版 (1973).
12) ヤンマー著，小出昭一郎訳『量子力学史 1, 2』東京図書 (1974).
13) 江沢洋・恒藤敏彦編『量子物理学の展望　下』岩波書店 (1978). 加藤敏夫「量子力学の函数解析」.
14) K. プルチプラム著，江沢洋訳・解説『波動力学形成史』みすず書房 (1982), pp.134, 258.

（いそざき・ひろし，筑波大学大学院数理物質科学研究科）

特集／シュレーディンガー

シュレーディンガーの猫
現代における量子情報科学への展開



古澤　明

1. はじめに

シュレーディンガーの残した「シュレーディンガーの猫」の「ユーザー」として，関連する量子エンタングルメントや量子情報科学について，筆者の経験に基づいて解説したいと思う．

2. シュレーディンガーの猫状態の「定義」

シュレーディンガーの猫は，シュレーディンガーの方程式と並んで，最も彼の名を世界に知らしめているものであろう．ご存じのように，箱の中にいる猫が，毒の瓶の割れたか否かにより，半分の確率で死に，半分の確率で生きているという「状態にある」というものである[1]．何で猫でなければならなかったかを筆者は知らないが，このような重ね合わせの状態は「シュレーディンガーの猫状態」と呼ばれている．

ただ，分野によって，いくつかの「定義」が存在しているようである．まず，一つの定義では，同時期に発表されたアインシュタインらのいわゆるEPRのパラドックスと絡めて，シュレーディンガーの猫状態を

$$|\text{毒の瓶が割れた}\rangle \otimes |\text{死んだ猫}\rangle + |\text{毒の瓶が割れていない}\rangle \otimes |\text{生きている猫}\rangle \quad (1)$$

とする．この定義の場合，重要なことは，「毒の瓶が割れるか否か」と「猫の生死」がエンタングルしていることである．つまり，毒の瓶が割れると猫は必ず死に，毒の瓶が割れなければ猫は必ず生きているという「相関」が存在している．仮に瓶だけを見ることができるとして，それが割れていれば，猫を見なくてもそれは死んでいることが確定してしまうのである．この様子は，エンタングルしている（量子エンタングルメントが存在している）と呼ばれ，シュレーディンガーが初めて言ったとされている．

もう一つの定義は（これは筆者の所属する量子光学分野の「方言」なのかもしれないが），マクロスコピックな重ね合わせ状態，つまり，

$$|\text{死んだ猫}\rangle + |\text{生きている猫}\rangle \quad (2)$$

である．この定義の主眼点は，死んだ猫と生きている猫の古典的な混合ではなく，2つの状態の量子力学的な重ね合わせであることである．

これら2つの定義は，量子エンタングルメントとマクロスコピックな重ね合わせ状態という，現代の量子力学の根源的テーマを与えている．もう少し言うと，これらはシュレーディンガーが提唱した20世紀前半には，「絵空事」（思考実験）であったのに対し，21世紀の現在ではテーブルトップで現実のものとなっている．この解説では，これらがどのように実現され，どのように応用されつつあるか（筆者らが楽しんでいるか）について述べようと思う．

3. 量子エンタングルメント

堂々巡りのような気もするが，量子エンタングルド状態は重ね合わせ状態である．シュレーディンガーの猫状態では，マクロスコピックな系を考えるが，ここでは簡単のため，2つの直交した状態 $|0\rangle$, $|1\rangle$ のみを取る量子A, Bで考える．

2つの量子A, Bの取り得る全体の状態は，

$$|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B, \quad |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B, \quad |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B, \quad |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \quad (3)$$

の4通りとそれらの重ね合わせである．例えば，これらをすべて重ね合わせると，

$$\frac{1}{2}\Big(|0\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{B}}+|0\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|1\rangle_{\mathrm{B}} + |1\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{B}}+|1\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|1\rangle_{\mathrm{B}}\Big) \tag{4}$$

となるが，「式変形」により，

$$\frac{1}{2}\Big(|0\rangle_{\mathrm{A}}+|1\rangle_{\mathrm{A}}\Big)\otimes\Big(|0\rangle_{\mathrm{B}}+|1\rangle_{\mathrm{B}}\Big) \tag{5}$$

となり，量子Aと量子Bは独立に0にも1にもなり得る．つまり，この場合は量子Aと量子Bはエンタングルしていない．それに対し，次のような重ね合わせ状態はエンタングルしている．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{B}}+|1\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|1\rangle_{\mathrm{B}}\Big). \tag{6}$$

したがって，取り得る状態の全部でない，いくつかの重ね合わせが量子エンタングルド状態ということになる．

また，この状態は，マクロスコピックな状態ではないということを除けば，シュレーディンガーの猫状態の1つ目の定義と等価である．つまり，量子Aが0であることがわかれば，量子Bを観測しなくても0であることがわかり，量子Aが1であることがわかれば，量子Bを観測しなくても1であることがわかるといった具合である．ただ，このような「一面的」な相関が量子エンタングルメントのすべてではない．

この状態を以下のように「式変形」してみよう．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Big(\frac{|0\rangle_{\mathrm{A}}+|1\rangle_{\mathrm{A}}}{\sqrt{2}}\Big)\otimes\Big(\frac{|0\rangle_{\mathrm{B}}+|1\rangle_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}\Big) + \Big(\frac{|0\rangle_{\mathrm{A}}-|1\rangle_{\mathrm{A}}}{\sqrt{2}}\Big)\otimes\Big(\frac{|0\rangle_{\mathrm{B}}-|1\rangle_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}}\Big)\right]. \tag{7}$$

明らかに，量子Aで $(|0\rangle_{\mathrm{A}}+|1\rangle_{\mathrm{A}})/\sqrt{2}$ であることがわかれば，量子Bを観測しなくても $(|0\rangle_{\mathrm{B}}+|1\rangle_{\mathrm{B}})/\sqrt{2}$ であることがわかり，量子Aで $(|0\rangle_{\mathrm{A}}-|1\rangle_{\mathrm{A}})/\sqrt{2}$ であることがわかれば，量子Bを観測しなくても $(|0\rangle_{\mathrm{B}}-|1\rangle_{\mathrm{B}})/\sqrt{2}$ であることがわかる．つまり，相関が存在する．もう少し正確に言うと，量子エンタングルメントは基底変換しても相関が存在する．これが古典的相関と量子エンタングルメントの本質的な違いである．

ただし，この議論では $(|0\rangle_{\mathrm{A}}+|1\rangle_{\mathrm{A}})/\sqrt{2}$ か $(|0\rangle_{\mathrm{A}}-|1\rangle_{\mathrm{A}})/\sqrt{2}$ であることを測定により明らかにしなければならないが，その方法は自明ではないことに注意が必要である．つまり，これを実験的に実現することが，実験家の「腕の見せ所」なのである．

もう少し筆者の行っている研究に話を近づけるため，量子エンタングルメントのオリジナルである，アインシュタイン・ポドルスキー・ローゼン（EPR）のパラドックス[2)]に話を移そう．EPRのパラドックスについてここで詳しく解説するつもりはないが，その定義について述べておくのは有意義だと思われる．EPR状態のオリジナルの定義は，2つの量子A, Bの位置演算子の和 $\hat{x}_{\mathrm{A}}+\hat{x}_{\mathrm{B}}$ と運動量演算子の差 $\hat{p}_{\mathrm{A}}-\hat{p}_{\mathrm{B}}$ の同時固有状態である．ここで，もちろん，位置演算子と運動量演算子の間には $[\hat{x}_k,\ \hat{p}_l]=i\hbar\delta_{kl}\ (k,l=\mathrm{A},\mathrm{B})$ の「不確定性関係」があるが，$\hat{x}_{\mathrm{A}}+\hat{x}_{\mathrm{B}}$ と $\hat{p}_{\mathrm{A}}-\hat{p}_{\mathrm{B}}$ は可換なので，同時固有状態が存在する．狭義のEPR状態はこれらの同時固有状態のうち，両方とも固有値が零のものとなっている．

ただ，種々の理由から今日では，EPR状態を量子A, Bの位置演算子の差 $\hat{x}_{\mathrm{A}}-\hat{x}_{\mathrm{B}}$ と運動量演算子の和 $\hat{p}_{\mathrm{A}}+\hat{p}_{\mathrm{B}}$ の同時固有状態（固有値は両方とも零）とすることのほうが多いようである．もちろん，この2つの演算子も可換であるし，全く等価な議論ができるので何の問題もない．したがって，ここからはこの流儀に従うことにする．

この流儀に従ってEPR状態を式で書くと，

$$\begin{aligned}|\mathrm{EPR}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx|x\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|x\rangle_{\mathrm{B}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp|p\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|-p\rangle_{\mathrm{B}}\end{aligned} \tag{8}$$

となる[*1)]．式から明らかであるが，量子Aで位置を測定しその値が x であるとすると，量子Bの位置は測定しなくても x であることがわかる．さらに，量子Aで運動量を測定しその値が p であるとすると，量子Bの運動量は測定しなくても $-p$ であることがわかる．この関係は，上で説明した $\{|0\rangle,\ |1\rangle\}$ と $\{(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2},\ (|0\rangle-|1\rangle)/\sqrt{2}\}$ の場合と等価で，異なった物理量でも（基底変換しても）相関が存在するという，量子エンタングルメントの性質を示している．

筆者らは，このEPR状態を量子光学的に実現している．量子光学においては，光の電磁場の消滅演算子 $\hat{a}$ を複素振幅のように見なし，$\hat{a}=\hat{x}+i\hat{p}\ (\hbar=1/2)$ のように2つのエルミート演算子 $\hat{x},\hat{p}$ に分解する．こうすると，$\hat{x}$ はcos成分の振幅演算子，$\hat{p}$ はsin成分の振幅演算子と読める．さらに，生成消滅演算子の交

*1) 規格化不能なので規格化因子は書かない（書けない）．

換関係 $[\hat{a},\ \hat{a}^\dagger]=1$ から $[\hat{x},\ \hat{p}]=i/2$ となり，cos 成分の振幅と sin 成分の振幅が位置と運動量のような共役物理量となる．したがって，位置と運動量で語られた議論を，光の直交位相振幅を用いて実験できるようになる．筆者らはこのトリックを用いている（実験家の「腕の見せ所」である）．

さらに言うと，複素振幅の絶対値の 2 乗が強度になるのと同様に，$\hat{a}^\dagger\hat{a}$ が光の強度演算子に相当し，光子数演算子 $\hat{n}$ となる．つまり，$\hat{n}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ である．この関係を用いると同じ実験で「光子」も扱うことができる．当然であるが，量子力学には「波動像」と「粒子像」の両面があり，$\hat{a}=\hat{x}+i\hat{p}$ として扱うと「波動像」であるが，$\hat{n}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ として扱うと「粒子像」ということになる．しかし，これらは同じ実験を違った側面から議論しているに過ぎない．

この様子は次の式に端的に表れている．式 (8) で表した EPR 状態は「式変形」すると，

$$|\mathrm{EPR}\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle_{\mathrm{A}}\otimes|n\rangle_{\mathrm{B}} \tag{9}$$

となり，光ビーム A で光子数を測定し n であれば，光ビーム B は測定しなくても光子数 n であることがわかってしまうというような関係になっている．もちろん，光ビーム A で cos 成分の振幅を測定して x であることがわかれば，光ビーム B の cos 成分の振幅は測定しなくても x であり，光ビーム A で sin 成分の振幅を測定して p であることがわかれば，光ビーム B の sin 成分は測定をしなくても $-p$ であることがわかる．このように，「波動像」でも「粒子像」でも量子エンタングルメントを語ることができるのである．

筆者らは，式 (8) の EPR 状態（したがって，式 (9) も満たす）を実験的に生成した[3]．図 1 に，その結果を示す．2 つの光ビーム A, B の間で，「位置」$\hat{x}$ と「運動量」$\hat{p}$ の両方で相関があり，量子エンタングルしていることが見て取れる．

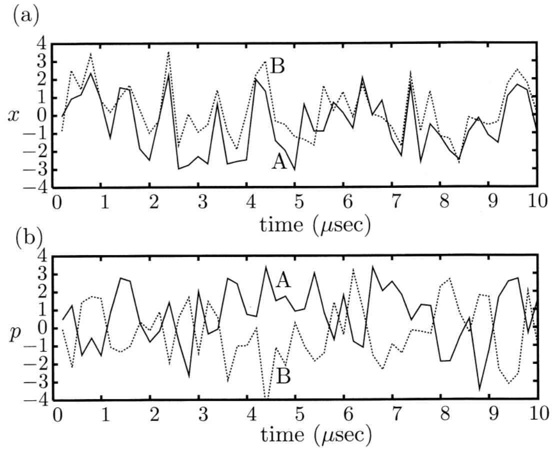


図 1 筆者らが生成した光ビーム A, B からなる EPR 状態における，(a) cos 成分振幅 x_{A} と x_{B}，(b) sin 成分振幅 p_{A} と p_{B} の間の関係[3]．cos 成分間では相関が，sin 成分間では反相関が見て取れる．時々刻々，観測の時間幅に対して 1 つの量子が定義され，それぞれに対して位置あるいは運動量を測定していることに相当する．

4. シュレーディンガーの猫状態

筆者らは量子光学的にシュレーディンガーの猫状態も生成している．そこでは，量子力学の「波動像」と「粒子像」を巧みに使い分けている．

まず，量子光学的なシュレーディンガーの猫状態の定義をしよう．それは，「定義」のところで述べた 2 つ目の定義を用いる．つまり，マクロスコピックな重ね合わせ状態である．量子光学におけるマクロスコピックな状態の代表格は，レーザー（「波動」の代表）の量子状態であるコヒーレント状態 $|\alpha\rangle=C\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^n/\sqrt{n!})|n\rangle$ である．ここで，α は任意の複素数で複素振幅を表し，C は規格化定数，n は光子数である[*2]．また，コヒーレント状態を「マクロスコピック」という理由は，多数の光子（状態）の重ね合わせだからである．

量子光学的シュレーディンガーの猫状態は，このコヒーレント状態を用いて，例えば $|\alpha\rangle-|-\alpha\rangle$ と書ける[*3]．筆者らはこの状態を生成した[4]．

筆者らの実験を理解するには，シュレーディンガーの猫状態 $|\alpha\rangle-|-\alpha\rangle$ の粒子像を理解することが重要である．コヒーレント状態は $|\alpha\rangle=C\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^n/\sqrt{n!})|n\rangle$ であるので，シュレーディンガーの猫状態 $|\alpha\rangle-|-\alpha\rangle$ は $C'\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^{2n+1}/\sqrt{(2n+1)!})|2n+1\rangle$ のように，奇数個の光子流となる．したがって，偶数個の光子流から 1 個光子を引き去ることで，シュレーディンガーの猫状態を生成できることになる[*4]．筆者らが用いた偶数個の光子流は，スクイーズド光（正確にはスク

---

*2) コヒーレント状態は複素振幅を持つ波動であり，ランダムな光子流 = 光子数の分布がポアソン分布でもある

*3) 任意の位相で重ね合わせても良いのであるが，実験との対比からここではマイナス（位相反転）で重ね合わせている．また，規格化因子は省略している．

*4) もちろん，$|2n+1\rangle$ の係数も合わせる必要がある．

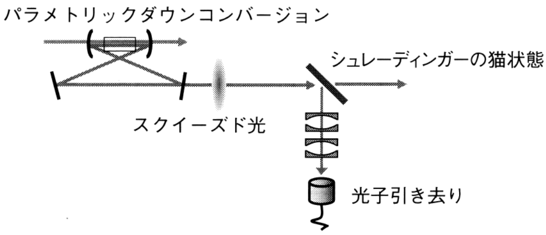


図 2　筆者らが行ったシュレーディンガーの猫状態生成のためのセットアップ．下の光子検出器で光子を検出すれば，1 つだけ光子を引き去ったことになるよう実験条件を決めている．

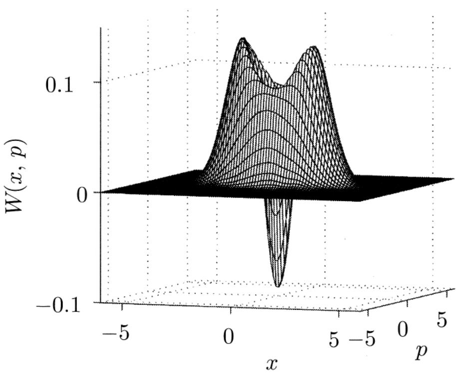


図 3　筆者らが生成したシュレーディンガーの猫状態．2 つの正のピークが「生きている猫」と「死んだ猫」を表している．さらに，重ね合わせのため起こる量子干渉として，原点 $(x, p) = (0, 0)$ に負のピークが現れている．

イーズされた真空場）と呼ばれ，2 次の非線形光学過程により生成できる．簡単に言うと，角周波数 2ω から ω への波長変換（パラメトリックダウンコンバージョン）において，エネルギー $\hbar \cdot 2\omega$ の光子 1 つが，エネルギー $\hbar\omega$ を持つ光子 2 つに分裂することを用いる $(\hbar \cdot 2\omega = 2\hbar\omega)$．これにより，偶数個の光子流 = スクイーズド光を生成できる．

図 2 にシュレーディンガーの猫状態生成のための具体的な実験セットアップを示す．また，図 3 に筆者らが生成したシュレーディンガーの猫状態を示す．

ここで，図 3 は Wigner 関数と呼ばれる準確率密度関数である．Wigner 関数は純粋に古典的な状態では非負の関数で完全な確率密度関数となるが，非古典的な状態では，負の値も取り得る[5]．「生きている猫」と「死んだ猫」との古典的な混合の場合，「生きている猫」に相当する確率分布の正のピークと「死んだ猫」に相当する確率分布の正のピークの 2 つのみが存在するべきである．それに対し，「生きている猫」と「死んだ猫」の重ね合わせ状態であるシュレーディンガーの猫状態の場合，それ以外にも重ね合わせによって起こる「量子干渉」のピークが存在するため，負のピークも存在するようになる．図 3 の実験結果では，その負のピークが現れており，古典的な混合との差は歴然となっている．

5. 量子情報科学への展開

ここまで述べてきた量子エンタングルメントやシュレーディンガーの猫状態に関する研究は，量子情報科学として，今日では一大研究分野となっている．

量子情報科学とは，量子力学と情報科学の複合分野である．量子状態 $|\psi\rangle$ に情報をコードし，それを量子コンピュータと呼ばれる「ユニタリー変換マシン」$\hat{U}$ に入力し，$|\varphi\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$ を出力として得，それを適当に測定し，最終的な情報を取り出すというものである．そのコアとなる量子コンピュータ $\hat{U}$ は，ハミルトニアン $\hat{H}$ を用いて $\exp(-i\hat{H}t/\hbar)$ であり，入力を $\psi(0)$，出力を $\psi(t)$ と書けば，シュレーディンガーの方程式 $\psi(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)\psi(0)$ となる（当然であるが）．したがって，量子情報科学あるいは量子コンピュータの研究において，コアの部分はシュレーディンガーの方程式通りに時間発展する量子状態の研究となっている．つまり，量子力学そのものの研究となっている．

また，量子状態へ情報をコードする部分においても，例えば，$|0\rangle_{\mathrm{L}} = |\alpha\rangle - |-\alpha\rangle$, $|1\rangle_{\mathrm{L}} = |\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$ とすれば，$|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle$ と $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$ の直交性から，いわゆる量子ビット $(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)$ $(|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1)$ をシュレーディンガーの猫状態で表現できるようになる．したがって，量子状態への情報のコーディングは量子状態生成の研究ともなっている．

最も基本的な「ユニタリー変換マシン」としては，図 4 に示した（一般化された）「量子テレポーテーショ

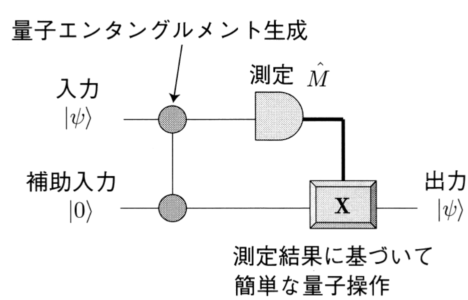


図 4　（一般化された）「量子テレポーテーションマシン」．

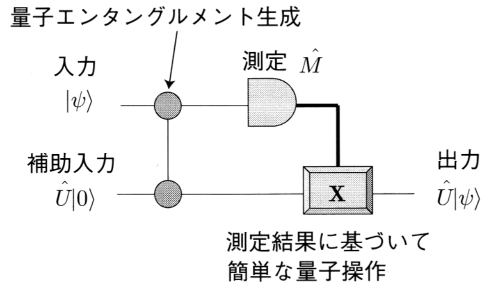


図5 「量子テレポーテーションマシン」を用いた量子情報処理 1.

ンマシン」が知られている.「量子テレポーテーションマシン」とは，入力が $|\psi\rangle$ のとき，出力も $|\psi\rangle$ となる恒等演算 $\hat{U}=\hat{I}$ の「ユニタリー変換マシン」である．もちろん，トンネルのように入力が物理的に何も操作されずにそのまま出てきたら何の意味もない．この「ユニタリー変換マシン」の中では，入力と補助入力がエンタングルし，その後測定に掛けられる．したがって，入力そのものは壊れてしまうが，補助入力は入力とエンタングルしているため，測定の影響により波束は収縮し，間接的に量子状態操作を受けたことになる．その後，測定結果に基づいて簡単な量子操作を行うことで，入力の量子状態が補助入力側で再現される．また,「入力が消え，補助入力側に現れる」ということで，量子「テレポーテーション」と名付けられている．

ここでのエッセンスは，入力と補助入力の間の量子エンタングルメントであることは明らかである.「量子テレポーテーションマシン」の中ではそれが形成され利用されているから，エッセンスを試すのには十分である．しかし，単なる「量子テレポーテーションマシン」だと恒等演算しかできないから，非常に簡単なこと = 恒等演算を量子エンタングルメントなどという奇妙なものを用いて難しくやっているという印象は否めない．しかし，以下の2つの例を見れば，そうでもないことに気づいてもらえると思う．

「量子テレポーテーションマシン」の応用の一例を図5に示す．ここでは，補助入力として $\hat{U}|0\rangle$ を用いたため，出力状態が $\hat{U}|\psi\rangle$ =「入力にユニタリー変換 $\hat{U}$ を施した状態」が出力されている．つまり，補助入力を $\hat{U}|0\rangle$ に変えただけで，入力状態にユニタリー変換 $\hat{U}$ を施すことができるのである．したがって，この方法には，異なったユニタリー変換を施すのにそれに相応しい補助入力に変えるだけで済み,「量子テレポー

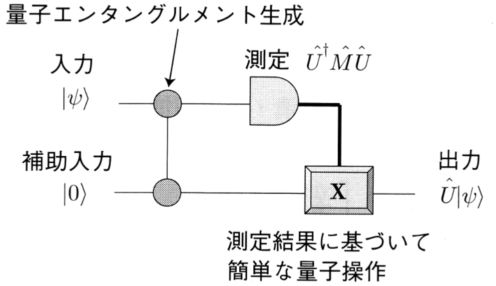


図6 「量子テレポーテーションマシン」を用いた量子情報処理 2.

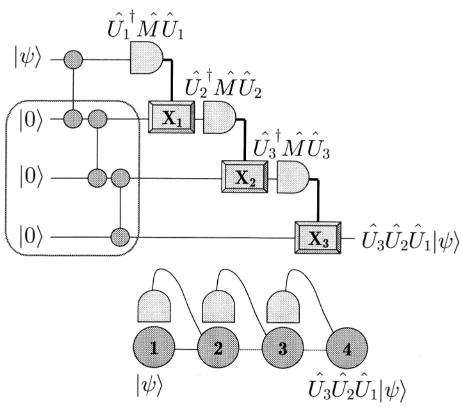


図7 図 6 の量子情報処理を連続して行う.

テーションマシン」そのものは変更する必要がないという大きな利点がある．さらに，任意の入力にユニタリー変換を施すのに比べ，決まった状態 $|0\rangle$ にユニタリー変換を施すほうが圧倒的に楽であることも重要な特徴である.

「量子テレポーテーションマシン」の応用のもう一つの例を図 6 に示す．この例では，図 5 の場合と異なり，補助入力は $|0\rangle$ のままで，測定する物理量（演算子）を $\hat{M}$ から $\hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{U}$ に変えている．それ以外は図 5 の場合と同様である．したがって，この例でも，異なったユニタリー変換を施すのに測定する物理量のみを変えれば良く，他の部分はそのままという特徴を持っている.

我々はこのような特徴を持つ量子コンピュータを「ソフトウェアベース」の量子コンピュータと呼んでいる．ハードウェアである「量子テレポーテーションマシン」をいじらずに，任意の計算（量子状態操作，量子情報処理）が可能となるからである.

この特徴は，図 7 のように，図 6 の量子情報処理を連続して行うと際だってくる．任意のユニタリー変換を 3 つ連続して施すときは，予め 3 つの補助入力がエンタングルした状態を用意し（図 7 で四角で囲んだ部分，量子クラスター状態と呼ばれる），必要となるユニタリー変換に合わせて測定する物理量を変更する．例えば，量子光学的な実験では振幅 $\hat{x}$ や光子数 $\hat{n}$ を測定したりすることで，その測定に応じたユニタリー変換が施されることになる.

筆者らは，図 5 の例として，ユニバーサルスクイーザー[6]や量子非破壊相互作用ゲート[7]を実現し，図 6，図 7 の実験も行っている．さらに，入力 $|\psi\rangle$ として，シュレーディンガーの猫状態を用いた実験も行っている.

6. おわりに

筆者らはシュレーディンガーの猫状態，シュレーディンガーの方程式，量子エンタングルメントのユーザーとして，毎日楽しく研究を行っている．これらのことは，シュレーディンガーが考えていた頃は「絵空事」だったが，筆者らの時代では「現実」である．つくづく良い時代に生まれてきたと思う.

参考文献

1) E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
2) A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
3) N. Takei, N. Lee, D. Moriyama, J.S. Neergaard-Nielsen, and A. Furusawa, *Phys. Rev. A* **74**, 060101(R) (2006).
4) K. Wakui, H. Takahashi, A. Furusawa, and M. Sasaki, *Opt. Exp.* **15**, 3568 (2007).
5) U. Leonhardt, *Measuring the Quantum States of Light*, Cambridge (1997).
6) J. Yoshikawa, T. Hayashi, T. Akiyama, N. Takei, A. Huck, U.L. Andersen, and A. Furusawa, *Phys. Rev. A* **76**, 060301(R) (2007).
7) J. Yoshikawa, Y. Miwa, A. Huck, U.L. Andersen, P. van Loock, and A. Furusawa, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 250501 (2008).

（ふるさわ・あきら，東京大学大学院工学系研究科）

統計熱力学の定式化

エントロピーを巡って



早川　尚男

1. はじめに

シュレーディンガーと聞いて，統計熱力学との繋がりを思いつく人はあまりいないであろう．しかしプランクが黒体輻射の問題でプランク定数とボルツマン定数を導入し，思いがけず量子論の扉を開いたことから考えても[1]，**統計熱力学は量子力学を生み出す上で重要であった**．またシュレーディンガーが『生命とは何か』[2]で「生命はネゲントロピーを絶えず取り入れている」と著述・講演することで分子生物学の産婆役を果たしたことを思い出しても，シュレーディンガーの物理観を理解する上で，彼の統計熱力学への取組みを理解しておくことは重要である．

しかしながら，シュレーディンガーの統計熱力学関係の研究論文の中でよく知られたものはなく，

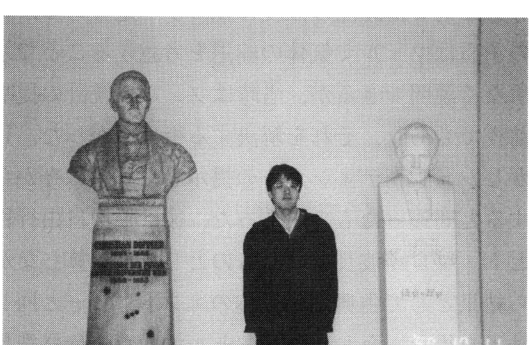


図1　ドップラー（左）とシュレーディンガー（右）の胸像の間に立つ筆者（1990年10月11日：ウィーン大学にて）．

一般には彼が統計熱力学の短い教科書を書いたことくらいしかイメージがないであろう[3]．本稿では，シュレーディンガーと統計熱力学の関わりを，彼の統計熱力学への貢献のみならず，統計熱力学という学問分野が彼の他の研究にどのような影響を与えたかを簡単にまとめてみよう．とりわけ彼が初期の論文で間違えたエントロピーを考える上でのギブスのパラドックスについてある程度紙数を割いて説明したい．

2. ボルツマンとシュレーディンガー

ウィーン大学のメインビルディングはウィーンの街中にあり，そこを訪れる観光客も多い．アーチを抜けると，中庭を取り囲むように回廊があり，心理学で一世を風靡したフロイトの他，物理関係でもボルツマン，ドップラー，シュテファン，ロシュミットといったウィーン大学ゆかりの有名教授たちの胸像が並んでいる．そこにはウィーン大学を卒業したシュレーディンガーの胸像もおかれている（図1）[4]．胸像となった物理学者は，シュレーディンガーとドップラーを除き19世紀末に活躍し，統計熱力学の分野で業績を残した人たちである．19世紀末といえばオーストリア・ハンガリー連合帝国が形成され，不安定な国際情勢の中，物理学のみならず心理学や音楽，美術，建築学等の幅広い分野で爛熟したウィーン文化が花開いた時期でもある．シュレーディンガーがウィーン大学に

入学したのはボルツマンが自殺した年と同じ1906年であるから，遅れてきた青年と言えるが，ボルツマンとマッハの論争や，前年のアインシュタインのブラウン運動の理論（1905）やペランの実験（1908）によって原子論が勝利を収めていく過程を学生時代に目の当たりにしており，その影響が大きかったことは想像に難くない．実際，ウィーン大学物理学教室の建物に入った折のことをシュレーディンガーはこう回想している．「古いウィーン大学物理学教室，そこからほんの少し前にルードビッヒ・ボルツマンは悲劇的な形で暴力的に引き離されてしまった．（中略）私にとって，ボルツマンの理想の及ぼす範囲は若い人の学問的思慕の対象という役割を果たしたのであり，これほどに魅せられたものを私は他に知らない．」[5,6]

ボルツマンのシュレーディンガーへの影響は非常に大きいと思われる．例えば1914年の論文[7]では，1次元弾性質点系の従う差分方程式の解がその連続極限である弦の微分方程式の解とかなり異なったものになることを陽に示しているが，そのバックグラウンドとしてボルツマンがオストヴァルドに対して「微分方程式を考えれば原子論と縁を切れることができると考える人には，森は見えても一本一本の木は見えないのだ，というありきたりの言葉をあげてお許し願いたい．」という言葉があった[6]．すなわち質点系を固体原子のモデルとして捉えたときに原子の個性がはっきりと現れることを例証したのである．一方でそこで用いた数学的手法が後の波動力学の解析に役に立ったと思われる．実際，差分方程式の解はベッセル関数の無限級数で表現されるが，この手の解はシュレーディンガー方程式の解によく現れるからである．

3. シュレーディンガーと統計力学：波動力学前夜

第一次大戦で従軍したシュレーディンガーは，戦後その物理学の守備範囲を色彩論や非平衡統計力学等に広げ，単なるボルツマンの後継者という以上の一線の物理学者と見なされるようになっていった．その中で，放射性元素の崩壊率の揺らぎに関してフォッカー・プランク方程式[8]を導入し，その詳細な解析を行った論文にまず触れよう[9]．この論文は幾つかの意味で重要な意味を持つ．一つはブラウン運動の問題を拡張した非平衡統計力学の権威であり，アインシュタインに劣らない貢献を果たしたスモルコフスキー[10]が第一世界大戦の最中に赤痢で急逝した後に彼の代わりにその分野の権威と看做され得ることを示したことである．もう一点として，シュレーディンガー方程式が虚数時間のフォッカー・プランク方程式と同等な数学的構造を持っていることから，フォッカー・プランク方程式の解析に通暁することで，後にシュレーディンガー方程式を導いた際に速やかに詳細な解析が可能になったということも大きな意味を持ち得る．

次に，本稿のテーマと最も深く関わってくる問題として，彼の気体の統計力学に関する論文を紹介しよう[11]．彼はエントロピーの示量性の要請から，分子数 N の系を二等分したときに状態数を $N!$ で割らないといけないという**ギブスのパラドックス**を考察する目的があったと思われる．もう一つはネルンストが提唱した**熱力学第三法則**と気体の等分配則との整合性である．言うまでもないが熱力学第三法則では温度 T が $T \to 0$ の極限でエントロピー S の変化がゼロになることを要求する．従って $T \to 0$ の極限で定積比熱は $C_V = T(\partial S/\partial T)_V \to 0$，定圧比熱は $C_p = T(\partial S/\partial T)_p \to 0$ となる．一方で等分配則では比熱は温度に依らず一定である．この矛盾はフェルミ気体の縮退を考慮することで矛盾なく説明できるが，当時はフェルミ統計の提唱前夜でもあり，それを解決する術はなかった．しかしシュレーディンガーの提示した解答は今からすると間違ったものであった．彼は平均自由行程とド・ブロイ波長を同じものとして，計算しながら結果として古典理想気体のエントロピーと同じ結果を得た．なお，キャンセルするため最終結果にはド・ブロイ波長は現れてこない．またギブスのパラドックスを特徴付ける $N!$ は計算結果に含めなかった．彼は（諸々の諸課題に何の解決も与

えていないのだが）自分の計算結果に自信があったのか，エントロピーの示量性は必ずしも必要がないという態度を取ったことは興味深い[12]．もちろん，彼の論文が全く無意味であるわけではない．すなわち物質波と縮退の概念を気体の統計力学に持ち込んでいる点は先駆的であり，その後の波動力学の導入に大きな意味を持ったと思われる．

量子力学の誕生前に量子統計力学の革命が起こっていた．言うまでもなく**ボースによるプランク分布の再定式化とボース統計**の考え方の提案である[13]．この論文は最初フィロソフィカルマガジンに投稿されたが掲載を拒否された．それに納得のいかなかったボースがアインシュタインに私信として送って，この論文に意味があればドイツ語に翻訳の上で当時最高の雑誌とされたツァイトシュリフト・フィア・フィジークに掲載されるように取り計らってくれ，という図々しい依頼も添えていた．アインシュタインは彼の論文の重要性をいち早く読み取ってドイツ語に翻訳の上で論文に掲載するように取り計らっただけでなく，今日**ボース・アインシュタイン凝縮（BEC）**として知られる相転移が起こることを示した[14]．それだけでなくアインシュタインは粒子の識別不能性について論考を進めると共にボース統計が熱力学第3法則を充たすことも示した．量子力学の誕生前夜に量子統計力学に対して本質的に重要な貢献がなされたのは興味深い．また同じ問題を扱いながら間違った答えを導いたシュレーディンガーと正しい答えを出したボースやアインシュタインの差は経験の差なのか，フェルミ粒子を念頭においたシュレーディンガーの論文提出が早すぎたのかどちらであろうか．ちなみにフェルミ統計はパウリ[15]の排他律の提案後，すぐフェルミ[16]が次いでディラック[17]が導出している．

さて，話をシュレーディンガーに戻そう．1925年にハイゼンベルクが量子力学を提案して，シュレーディンガーはすぐ波動力学の論文を書いたわけではない．その直前の「アインシュタインの気体論について」という論文でBECについて論じている[18]．この論文についてはある程度詳しく論じてみよう．この論文では N_s 個のボース理想気体分子がエネルギー ϵ_s の状態にあるとして，温度 T の系のボルツマン重率の和は

$$\prod_s \sum_{N_s=0}^{\infty} e^{-N_s\epsilon/kT} = \prod_s \frac{1}{1-e^{-\epsilon_s/kT}} \quad (1)$$

となる．彼はそこでコーシーの積分定理を用いて，分配関数を

$$Z = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, z^{-N-1}\prod_{s=1}^{\infty}\frac{1}{1-zx_s} \quad (2)$$

と表現した．但し $N=\sum_s N_s$ は粒子数，$x_s \equiv e^{-\epsilon_s/kT}$ で，ボルツマン定数 k である．今の統計力学と比較すると z は逃散能であり化学ポテンシャル μ と $z=e^{\mu/kT}$ という関係になっていることが分かる．更に積分から $s=0$ の寄与を取り除いたのは正しい扱いである．しかし**$s=0$ の寄与がないからBECは起こらないとしたのは間違いであった．**

彼は，その後半部分で特殊相対論に基づき輻射を論じている．位相速度 u は光速 c と粒子速度 v を使って $u=c/\beta=c^2/v$ と表される．従って，振動数 ν，プランク定数 h との間に成り立つ相対論的ド・ブロイの関係式 $\nu=mc^2/h\sqrt{1-\beta^2}$ を用いると位相速度は

$$u = \frac{c\nu}{\sqrt{\nu^2-\nu_0^2}} \quad (3)$$

という分散関係に従い，その特異点 $\nu=\nu_0$ 近傍での振舞いが最も重要になる．ここで ν_0 は粒子振動数 $\nu_0\equiv mc^2/h$ である．この導出から明らかなように粒子と波動の二重性に基づく物質波の考えを用いており，同じ年の波動力学の考え方の萌芽が見られる．

4. 統計熱力学の教科書：エントロピーを巡って

シュレーディンガーが「アインシュタインの気体論について」の論文[18]を著した直後に波動力学の記念碑的論文を投稿し，彼は否応なく量子力学建設の場の最先端に躍り出た．従って暫くは統計熱力学の問題に立ち戻ることはできなかった．シュレーディンガーが波動力学の論文を書いた頃はチュー

リヒにいたが，その後ヨーロッパ物理界の頂点であるベルリン大教授（1927）になったが，ヒトラー政権の樹立を嫌い間もなくベルリンを去り，オックスフォード（1933），グラーツ（1936）等を経てダブリン（1939）に居を落ち着けた．ダブリンでは統一場の理論や生物物理等の課題に取り組んだが，特に生物物理の問題を目の前にした折には再び統計熱力学の基礎的な問題，特にエントロピーについて再考せざるを得なかったであろう．その疑問が「**ネゲントロピー**」という言葉を生んだと思われる[2)]．

シュレーディンガーは『生命とは何か』を著した2年後に**『統計熱力学』の短い教科書**を著している[3)]．その教科書はある程度大きな図書館であれば普通においてあるだろう．彼は「量子力学は統計力学の中で生まれ，統計力学の中で終わる」と言ったと伝えられる[6)]．20年の時を経て，量子力学の基礎的分野で不朽の業績を幾つも挙げ，また『生命とは何か』で未だに多くの研究者に影響を与え続けている彼が何を求めて統計熱力学の研究に再帰してきたのだろうか．

シュレーディンガーの教科書は100ページにも満たないものなので読みきるのはそれほど難しくない．彼はボルツマン流の非平衡問題を扱うことをせずギブス流の平衡統計力学に話を絞り，さらに応用問題をほぼ割愛して基礎的な諸問題に話題を限定している．興味深いと言うべきか当然と言うべきか，彼が波動力学前夜に取り組んで不完全な解答しか与えられなかった熱力学の第三法則，ギブスのパラドックス，縮退の問題やBEC等について多くのページを割き，その後の発展を考慮した正しい解答を与えた．

ここでギブスのパラドックスについて彼の教科書に従って説明しよう．この問題は1924年の論文[11)]で混乱した結論を導いているが，1926年の論文[18)]で導入した方法を用いて無矛盾な結果を導いている．同時に現代風の統計力学の教科書でもすっきりと説明しているものは多くないので読者にとっても参考になるのではないだろうか．1926年の論文ではボソンしか扱っていなかったがボソン・フェルミオンの双方の理想気体を一括して扱おう．考えている系は理想気体で個々の質量は m，粒子数は N，体積は V とする．理想気体なので個々の粒子のエネルギーは運動量 p を用いて $\epsilon = p^2/2m$ という関係を充たす．

よく知られているように分布関数は

$$f_{\pm}(z) = \prod_s (1 \pm z x_s)^{\pm 1} \tag{4}$$

で表される．ここで $+$ はフェルミオン，$-$ はボソンを表す．ここで (2) と同様に分配関数 Z はコーシーの積分定理から

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \oint dz\, z^{-N-1} f(z) \tag{5}$$

と書ける．但し積分は複素 z 平面上で原点の周りで行い，$z=0$ 以外に被積分関数の特異点はないものとする．フェルミオン，ボソンの両方の場合とも被積分関数は正の実軸上で $z=0$ での大きな値から始まること，その対数微分は負の値から単調増加で正になることを示すことは容易である．従って Z を鞍点法で計算可能である．正の実軸上で

$$z^{-N-1} f_{\pm}(z) = e^{g(z)} \tag{6}$$

とおいて鞍点は $g'(z)=0$ の条件で決める．鞍点法を用いると

$$Z = z^{-N-1} f_{\pm}(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi g''(z)}} \tag{7}$$

$$\log Z = -(N+1)\log z + \log f_{\pm}(z) - \frac{1}{2}\log(2\pi g''(z)) \tag{8}$$

となる．ここで $N \to \infty$ の極限を考えよう．$g''(z)$ は高々 $O(N)$ であり (8) の右辺最終項は高々 $O(\log N)$ となるので他の項に比べて無視できる．また $N+1$ は N に置き換えられるので

$$\begin{aligned} Z &\simeq -N \log z + \log f_{\pm}(z) \\ &= -N \log z \pm \sum_s \log(1 \pm z e^{\epsilon_s/kT}) \end{aligned} \tag{9}$$

となる．ここでシュレーディンガーは熱力学関数 $\Psi \equiv S - U/T$ を導入した．但し U は内部エネルギーである．もちろんヘルムホルツの自由エネルギー F と Ψ は $\Psi = -F/T$ という関係で結ば

れる．従って

$$\begin{aligned}\Psi &= k\log Z\\ &= -Nk\log z + \frac{8\pi Vk}{3h^3}(2mkT)^{3/2}\\ &\quad\times\int_0^\infty \frac{dx\ x^4}{\frac{1}{z}e^{x^2}\pm 1}\end{aligned} \tag{10}$$

が成り立つ．但し，スピン自由度は考慮せず $\sum_s \bullet \to (4\pi V/h^3)\int_0^\infty dpp^2\bullet$ として $x=p/\sqrt{2mkT}$ という変数変換をしてから部分積分をしている．一方で内部エネルギー U と圧力 P の充たす熱力学関係式

$$U = T^2\frac{\partial\Psi}{\partial T},\quad P = T\frac{\partial\Psi}{\partial V} \tag{11}$$

より $PV=2U/3$ というよく知られた関係式が出てくる．また理想気体では U が

$$U=\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}(kT)^{5/2}\int_0^\infty\frac{dx\,x^4}{\frac{1}{z}e^{x^2}\pm 1} \tag{12}$$

と書けるので

$$\Psi = -Nk\log z + \frac{PV}{T} \tag{13}$$

となる．また粒子数は

$$N = \frac{4\pi(2mk)^{3/2}}{h^3}VT^{3/2}\int_0^\infty\frac{dx\,x^2}{\frac{1}{z}e^{x^2}\pm 1} \tag{14}$$

となる．

ここで高温低密度の古典近似を採用してみよう．このとき $z=e^{\mu/kT}\ll 1$ なので (14) の ± 1 は落すことができる．その結果

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\frac{V}{N} \tag{15}$$

となる．これを (10) 式に代入して $S=\Psi+U/T$ を用いると

$$\begin{aligned}S &= Nk\log(1/z) + \frac{5}{2}Nk\\ &= Nk\log\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2}Nk\log\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)\\ &\quad + \frac{5}{2}Nk\end{aligned} \tag{16}$$

を得る．この式は興味深い式である．というのはエントロピーの示量性を正しく導いているからである．ちなみに最初から古典気体を仮定してエントロピーを計算するとよく知られているように

$$\begin{aligned}S_{cl} &= Nk\log V + \frac{3Nk}{2}\log\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)\\ &\quad + \frac{3}{2}Nk\end{aligned} \tag{17}$$

となり，(16) 式とは異なり示量性を持たない表現になる．そのため通常 $\log N!$ を引くことで示量性を回復させる．しかしシュレーディンガーの導出法に基くと $\Delta S \equiv S_{cl} - S$ を計算するとスターリングの公式を用いて

$$\Delta S = Nk\log N - Nk \simeq k\log N! \tag{18}$$

という項が自然と現れる．

この違いがどこに現れたかを復習するのは教育的である．まずは**量子理想気体経由の計算では粒子の個別性をカウントしていない**ので粒子が量子状態にあるときに置換因子 $N!/\prod_s N_s!$ を計算に入れず，それを 1 としている点にある．シュレーディンガーは古典的取扱い (17) 式でエントロピーが示量性を失った原因についても言及している．すなわち，古典的計算では体積を一定にして行った結果，粒子数を倍にした場合に量子状態の密度が倍になってしまったために矛盾した結果になったと説明している．

シュレーディンガーはその教科書の中で昔の論文で手痛い目にあった BEC や熱力学第三法則についても説明しているが，その説明は通常の教科書のそれと大きくは違わない．その他，輻射について論じた 9 章では弟子の H.W. ペンと確率解釈でノーベル賞を取ったマックス・ボルンが発展させた新しい理論について紹介している．ボルンがこの小冊子を気に入ったと聞いて喜んだシュレーディンガーは「私にとって科学の美を追求することが至上の目的です.」[6] と応えている．

5. 結び：シュレーディンガーの統計熱力学の現代的意味

シュレーディンガーと統計熱力学との関わりについて彼の幾つかの論文と教科書を紹介しつつ駆け足で書いてみた．しかし，彼がボルツマンに魅

せられていたことや，弟子のペンに語った「**量子力学は統計力学から生まれ，統計力学の中で終わる．**」という言葉，「ネゲントロピー」で生命を特徴付けようとしたことから考えて彼自身が自ら統計力学で成し遂げたことだけでなく統計力学の当時の現状に満足していたとは思えない．彼自身は非平衡開放系でのエントロピーあるいはその役割を果たすものを物理学に基き定式化することに思いを馳せていたと考えるのが自然であろう．彼の死後48年経って，そのシュレーディンガーの夢が叶ったとは思えない．今後，エントロピーに対する理解が進み，非平衡物理の基礎が発展して生命現象を含めて広範な物理現象を記述していくことがシュレーディンガーの残した夢であり，我々に課された宿題であろう．

注と参考文献

1) M. Planck, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.* **2**, 237 (1900).
2) E. Schrödinger, *What is life*? (Cambridge Univ. Press, 1944).
3) E. Schrödinger, *it Statistical Thermodynamics*, 1st. Ed. (1946), 2nd. Ed. (1952).
4) エルンスト・マッハの胸像は市庁舎の前庭広場にある．
5) E. Schrödinger, *Sitzber, Press. Akad. Wiss. Phys. -Math. Kl.*, C-CII (1929).
6) W. Moore, *Schrödinger, Life and Thought.* (Cambridge Univ. Press, 1989).
7) E. Schrödinger, *Ann. Phys.* **44**, 916 (1914).
8) A. Fokker, PhD. thesis (Univ. Leiden, 1913); M. Planck, *Sitz, der preuss. Akad.* **23**, 324 (1917). スモルコフスキーが1915年に論文を書いており，プランクの寄与はよく分からない．
9) E. Schrödinger, *Sitz. k. Akad. Wiss. Wien, Math. -Naturwiss. Kl.* **127**, 237 (1918), *ibid* **128**, 177 (1919).
10) M.v. Smoluchowski, 1872–1917. 原子の実在を巡る非平衡統計物理の問題でアインシュタインと競合した．実空間のフォッカー・プランク方程式はスモルコフスキー方程式と呼ばれる．また凝集現象を記述する方程式もスモルコフスキー方程式と呼ばれ，何を隠そう1987年9月号の数理科学で筆者が解説した題材が彼の方程式に基づく「凝集現象の数理」だった．
11) E. Schrödinger, *Phys. Z.* **25**, 41 (1924).
12) もちろん，すぐその考えは撤回している．量子力学誕生前夜の混乱を読み取って欲しい．
13) S.N. Bose, *Z. Phys.* **26**, 178 (1924).
14) A. Einstein, *Sits. Pre. Akad. Wiss.* **1**, 3 (1925).
15) W. Pauli, *Z. Phys.* **31**, 625 (1925).
16) E. Fermi, *Z. Phys.* **36**, 902 (1926).
17) P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **112**, 661 (1926).
18) E. Schrödinger, *Phys. Z.* **27**, 95 (1926).

（はやかわ・ひさお，京都大学基礎物理学研究所）

特集／シュレーディンガー

測色の研究

3原色説と反対色説に共通する場を求めて



鶴田 匡夫

1. 測色との出会い

シュレーディンガー（1887–1961）は一時期測色の研究に専念し，後に引用されることの多いいくつかの原著論文と視覚に関する総合論文を書いた．これは第一次世界大戦後の混乱期に母校ウィーン大学（オーストリア）で部屋住みの研究生活を余儀なくされていた頃に手掛けた研究であるが，その成果を高く評価して彼をヘルムホルツの後継者に擬する人も少なくない．

彼は短い自伝[1)]の中で，「修士課程を終えて実験物理学教授F. エクスナーの助手に採用された1911年に，すでに自分は実験家には向かないと自覚した」と記している．しかしそれに続けて実験助手になったのは幸運だったと回顧し，「実験室には素晴らしい器械が沢山あり，私は欲しいもの，特に光学器械を自室に運び込み，スペクトルをとったり，干渉計を調整して感動したり，色を混合する（図1の原理による色彩計，恐らくヘルムホルツの色彩計を指す）ことなど，やろうと思えば何でも実験することができた．しかし当時とりわけ貴重だったのは，学生の実験実習のすべてを任されたことであった．私は測定の意味するところを直接観測することによって知る理論家だ．このような理論家がもっといればいいのにと私は思ったことであった」，と書いている．

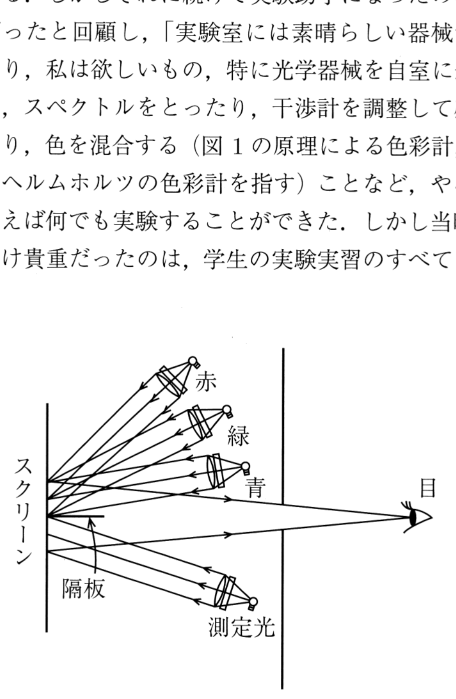


図1　等色実験の配置．

しかし，恵まれた研究環境は世界大戦の勃発（1914）と敗戦（1918），その結果であるオーストリア・ハンガリー帝国の分割という激変に翻弄されて暗転する．戦後まもなく手に入りそうにみえた旧帝国領チェルノウィッチ大学理論物理助教授のポストは，その地がルーマニアに割譲され新政府が外国人の受け入れを拒否したため消えてしまい，彼は収入のないままウィーン大学で研究を続けざるを得なかった．私生活では彼のよき理解者で不安定ながら研究生活に戻れたことを喜んでくれた父ルドルフが他界した（1919）．

この頃まで彼は数理物理・初期量子論・一般相対論などに関するかなりの数の理論論文を散発的に発表していたが，実験物理に関するものはほとんどなく，光のコヒーレンスをヤングの干渉を使って調べた論文が目につく程度である．

戦後まもなくの頃に手掛けた視覚と測色の研究の中で論文にまとめられたものには，「明所視における測色の基礎理論」[2)]，「明るい顔料の理論」[3)]（いずれも1920年），「視覚の発生」[4)]，「星の色」[5)]，「3原色と4原色の関係」[6)]（1924–26）などがある．最後に挙げた論文は，それまで多くの人々が水と油の関係と考えていたヤング・ヘルムホルツの3原色理論とヘリング（E. Hering）の反対色理論が実は基本色の選び方の違いに発していて，数学的には等価であることを明らかにしたもので，その後幾多の曲折を経て両者が融合するきっかけを作った論文として著名である．

一方，視覚に関する総合論文はミューラー・プイエ編：『物理学教本（11版）』（1926），第2巻第1分冊[7)]に

掲載された．この本の大部分が旧版（1909）の部分的改訂だったのに対し，視覚の章はシュレーディンガーによる書き下しでページ数も 78 から 108 ページへと 5 割増になっている．生理光学の拠点だったエクスナー教援グループに属していたとは言え，新進気鋭の専門家との評価がその頃すでにドイツ語圏で定着していたのであろう．ちなみにマッカダム（D.L. MacAdam）編：『Sources of Color Science』（1970）にはこの総合論文中の色差閾値の項と，先に挙げた「測色の基礎理論」の抄訳が掲載されている．プラトンに始まる色彩論の歴史的文献 26 篇の中に 2 篇も取上げられているのである．

以下に彼の研究を「3 原色と 4 原色の関係」を中心に解説する．その前に予備知識として加法混色について簡単に触れておきたい．

2. 加法混色の原理

目に入った光がどのようにして色の感覚を生じるかを研究するのは物理学・生理学，更には心理学までを含む学際的なテーマである．その中で光と色の定量的な関係を探して色を計量する体系を確立するのは物理分野の人々に託された課題であった．ニュートンに始まりヤング，マクスウェル，ヘルムホルツと続く，それぞれの時代を代表する天才たちに受継がれ，20 世紀前半にほぼ完成をみた色彩学，狭義には測色（colorimetry）と呼ばれる分野である．

この流れの中から，網膜には赤・緑・青の 3 つの光に反応する 3 種の視細胞が存在するというヤング・ヘルムホルツの 3 原色仮説や，赤と緑，黄と青および明るさの強弱に反応する 3 種の視物質が存在するというヘリングの反対色仮説，更にはこの 2 つの仮説を融合・統一させる段階仮説などが提案され，現代はそれらを細胞や分子のレベルで理論的・実験的に検証する時代ということもできよう[8]．ここでは，色の計量を可能にした光と色の感覚の間にあって最も基本的な経験則である加法混色の原理を解説する．

正常な色覚をもつ人に共通する経験によれば，ほとんどすべての色は 3 つの原刺激（赤・緑・青の単色光．R・G・B で表わす）を混合することによって等色すなわちその色と同じ色に見えるようにすることができる．3 つの色の混合比が同じであれば明るさとは無関係に同じ色に見えることは広く知られている．今では原刺激として，R には波長 700 nm の単色光，G と B には水銀のスペクトル 546 nm と 436 nm が使われている（1931 年の国際規約）．

色に対する光の波長別の寄与を知るために，上の 3 つの原刺激の混合が白色光（厳密には等エネルギースペクトルの白色）と等色する条件を調べてみよう．図 1 に示す配置により視野の上半分がフィルターによって明るさを加減できるプロジェクターからの原刺激によって照明され，下半分は被測定光とする．後者に白色光を選ぶとこれに等色する 3 つの原刺激の値は目に感じる明るさの単位（測光単位，例えばルクス）で測ると，何と R が 1 に対して G が 4.59，B が 0.06 となる．青や赤の光は緑の光と比べて明るさへの寄与が小さいにもかかわらず，色への寄与は逆に非常に大きいことが分る．緑と赤の 2 色では白っぽい黄色にしかならないが，緑のわずか 80 分の 1 の量の青い光を加えるだけで白色に変わるのである．

そこで白色光に等色する原刺激の光の強さを測光量で表わすのを止め，このときそれぞれの色の強さが等しいとする測色の単位が採用されることになった．色光 F に等色する 3 つの原刺激をこの単位で表わした値を 3 刺激値と言い，ふつう R, G, B で表わす．ある色光 F の色度座標（r, g, b）を次式で定義するのである．

$$r = \frac{R}{R+G+B}, \tag{1}$$

$$g = \frac{G}{R+G+B}, \tag{2}$$

$$b = \frac{B}{R+G+B}. \tag{3}$$

このとき $r+g+b=1$ が常に成り立つから，色は例えば r と g の 2 つの量で表わすことができる．$r = g = 0.333$ は白色光ということになる．

容易に実現でき，しかも再現性のいい被測定光として等エネルギーの単色光を選び，図 1 の配置で測定した結果を図 2 に示す．横軸に被測定光の波長，縦軸には 3 刺激値をとってある．現代では 3 本の曲線のそれぞれを $\bar{r}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$, $\bar{b}(\lambda)$ と表示して CIE 1931 rgb 系の等色関数と呼ぶ．網膜が赤・緑・青に最大感度をもつ 3 種類の視細胞から構成されると仮定すれば，$\bar{r}(\lambda)$, $\bar{g}(\lambda)$ および $\bar{b}(\lambda)$ はそれぞれの分光感度を色の明るさを単位にして測ったものと言える．

この等色関数が示す奇妙な性質に，図 2 に明らかなようにそれには負の応答を示す波長域があるという事実がある．特定の波長の単色光に対しては 3 つの原刺

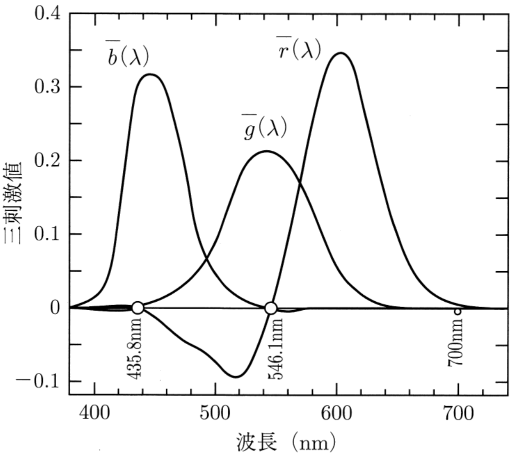


図 2　CIE 1931 rgb 系の等色関数．

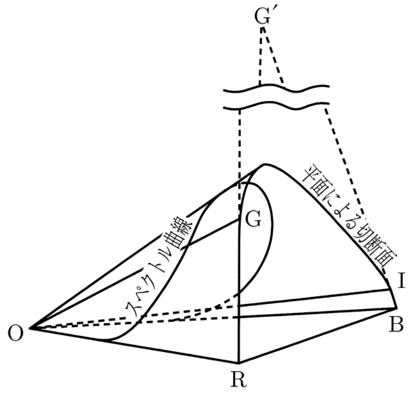


図 3　スペクトル錐（Schrödinger）．

激の混合によっては等色ができず，その代わりに例えば 500 nm の青緑（シアン）光に対しては赤の原刺激を被測定光の方に加えてはじめて等色することができるのである．この傾向は赤の原刺激に顕著であるが，青や緑にも僅かであるが存在する．この性質は色を計算するという実用的な立場から不便なだけでなく，これを視細胞の分光感度と見なそうとする立場からも不都合である．我々の知っている光検出器にはこのような特性は見出せないからである．そこで実在しない色を原刺激に選んでこの不都合を回避する試みが 19 世紀末から行われるようになった．

原刺激の選び方によって色の番地（r, g, b）は変わるけれど，そのために測定をやり直す必要はない．座標変換の公式を作れば後は単純な行列計算で新しい番地を指定することができる．数学に極めて堪能だったシュレーディンガーが最初に手掛けたのはその変換式をアフィン幾何学を使って一般的に求めることであった．そしてその卓抜な応用が 3 原色説と反対色説の共通点を数学的に明らかにした発見であった．

3. アフィン変換の導入[2)]

シュレーディンガーが描いた測色の原理図を図 3 に示す．彼がスペクトル錐と呼んだもので，3 つのベクトル OR, OG および OB は混色に用いた実在する 3 原色（赤，緑，青）を表わす基底ベクトルである．すべての色は被測定光に単色スペクトルを選んで得られる色座標を結んだ曲線（図中でスペクトル曲線と表示）で囲まれた錐体の内部にあり，これを平面で切った断面が色度図になる．3 角形 RGB の内部では狭義の加法混色則が成り立ち，これをはみ出した部分は被測定光に原刺激の一部を加えて等色できる領域を表わす．

いまある特定の色光 F が基底ベクトル F_1, F_2, F_3 を用いてベクトル，

$$F = x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3 \tag{4}$$

で表わされたとき，これを次式による新しい基底ベクトル，

$$A = a_1F_1 + a_2F_2 + a_3F_3, \tag{5}$$

$$B = b_1F_1 + b_2F_2 + b_3F_3, \tag{6}$$

$$C = c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3 \tag{7}$$

を用いて表わすと，

$$F = x_1'A + x_2'B + x_3'C \tag{8}$$

が得られる．これは新旧 2 つの基底ベクトル系に対して加法混色の原理が共通して適用できるとする物理的に妥当な仮説から導かれたものである．これより次式が得られる．

$$x_1 = a_1x_1' + b_1x_2' + c_1x_3', \tag{9}$$

$$x_2 = a_2x_1' + b_2x_2' + c_2x_3', \tag{10}$$

$$x_3 = a_3x_1' + b_3x_2' + c_3x_3'. \tag{11}$$

この変換が一義的な解をもつ条件は

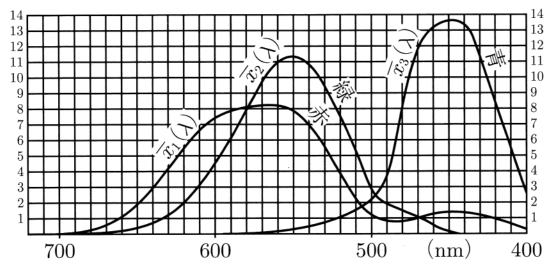
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{12}$$

である．この変換をアフィン変換と言う．

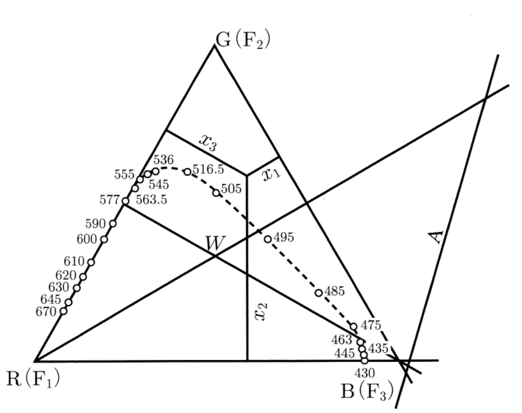
当時すでに上記 3 つの原色の代わりに，実在しない

色を原刺激に選ぶことの利点が知られていた．例えば図 3 において R と G および B と I（インジゴ，色名は藍色，波長約 460 nm）を結ぶ線が直線で近似できることが知られていたから，RG と BI をそれぞれ延長して交差する点を新しい原刺激 G′ に選べばすべての色が 3 角形 RG′B の内部に収まるので等色関数から負の部分が消えるのである．

また，等色関数と 3 原色説を強く結びつける目的で，第 1 および第 2 赤緑色覚異常者を被験者にした実験も行われた．実測した等色関数から適当なアフィン変換を経て新しい等色関数 $\bar{x}_1(\lambda)$, $\bar{x}_2(\lambda)$, $\bar{x}_3(\lambda)$ を計算すると，第 1 異常者の $\bar{x}_1(\lambda)$ と第 2 異常者の $\bar{x}_2(\lambda)$ がほぼ波長 λ に無関係に 0 になる他，両被験者とも残りの 2 つの曲線が正常者のそれと非常によく合致した．赤緑色覚異常者には赤または緑に反応する視細胞が欠けていることを強く示唆するこの発見はケーニッヒとディートリッチによってなされ，3 原色説を強く支持するものであった（1893）[9]．彼らはこうして得られた等色曲線を基本視知覚曲線（Grundempfindungskurve）と呼んだ．図 4 (a) に彼らが得た基本視知覚曲線を，(b) に色度図を示す．色度図は基底ベクトル F_1, F_2, F_3 を互いに直交させそれを単位平面で切った正 3 角形断面で表示してある．原刺激 F_1, F_2, F_3 は現実には存在しないもので，ケーニッヒらはそれぞれを基本赤，基本緑，基本青と名付けた．点線で描いた曲線は単色スペクトルに対する色座標（x_1, x_2, x_3）を表わし，これと基本感覚曲線 $\bar{x}_1(\lambda)$, $\bar{x}_2(\lambda)$, $\bar{x}_3(\lambda)$ とは簡単な計算式で結ばれている（説明省略）[10]．W は白色の座標である．



(a)



(b)

図 4　(a) 基本視知覚曲線（König und Dietrich）[6]，(b) 色度図（同上）．

4. 反対色理論[11]の新解釈[6]

シュレーディンガーはヘルムホルツの流れをくむ 3 原色説を支持する立場にあったが，それと対立するヘリングの反対色理論に彼のアフィン変換理論を大胆で緻密な，いかにも後の大物理学者の片鱗をうかがわせる仮説を設けた上で適用し，2 つの理論がアフィン変換を介して等価な基本視知覚曲線をもつことを明かにした．

反対色理論は生理学者ヘリングが 1870 年代に提唱したもので，ヘルムホルツの 3 原色説と大きく異なるところは，黄色を原色に加えるところにあった．彼は純粋な黄色には赤の成分も緑の成分も含まれないという直観的観察の結果からこれを原黄（Urgelb，ユニーク黄と訳す場合が多い）と呼び心理的実験によってその波長を 575 nm とし，これを原色に加えて 4 原色説を主張したのである．残る 3 つの原色には従来と同じ赤の他に原緑（Urgrün, 495 nm）と原青（Urblau, 472 nm）があるとした．シュレーディンガーはこれを先に挙げた論文では 4 原色理論と呼んだのである．

ヘリングはまた，色の理論に明るさの尺度を導入し，白と黒（あるいは明と暗）を原色に加えた．更に彼は，2 つの原色が対をなすと考え，網膜中には赤と緑，黄と青および白と黒に反応する 3 つの異なる物質があり，それらは対の一方例えば赤に対して同化作用をもつと他方の緑に対しては異化作用をもち，両作用は互いに独立ではないとした．ここに同化と異化とは植物の新陳代謝から借用した概念のようで，光による化学物質の可逆的な合成と分解を指したものであろう．この観点によれば，赤と緑の対および黄と青の対にはそれぞれに基本視知覚曲線が存在し，それらは正の波長域と負の波長域をもつことが予想される．

シュレーディンガーはヘリングの原黄は 3 原色理論によれば図 4 (a) において基本視知覚曲線 $\bar{x}_1(\lambda)$ と $\bar{x}_2(\lambda)$ が拮抗して打消し合いその結果両者が同じ値をも

つ点の波長であると考え，これを図から求めて577 nmを得た．彼はこの値がヘリングの原黄とよく一致するだけではなく，これが図 4 (b) の B と W を結ぶ直線の延長上にあること，すなわち原黄が基本青の補色であることを見出した．この直線は図 4 (b) 中の記号を使えば $x_2 - x_1 = 0$ で表わされる．また $\bar{x}_1(\lambda)$ と $\bar{x}_3(\lambda)$ の交点から得られる波長 497 nm は原緑の波長 495 nm と驚くほどよい一致を示し，これが R と W を結ぶ直線の延長上にあって基本赤の補色であることも明らかにした．直線 RW は $x_3 - x_2 = 0$ で与えられる．

冒頭に挙げたエクスナー教授は当時光の色（x_1, x_2, x_3）と明るさ h の関係を網羅的に調べ，次式を得ていた[12]．

$$h = x_1 + 0.756x_2 + 0.024x_3. \tag{13}$$

この式から直線 RW と BW と並列すべき第 3 の直線を選ぶには，$x_1 + 0.756x_2 + 0.024x_3 = 0$ とすればいい．これは無輝線（alycne）と呼ばれ，明るさが 0 の直線である．図 4 (b) 中ではこれを記号 A で示してある．厳密には RW と BW で作る紙面内にはないが便宜的に記入した．

このように定義した 3 つの直線がシュレーディンガーのスペクトル錐を平面で切ったときの 3 角形の各辺を形成するような基底ベクトル A, B, C を選ぶと，色座標（x'_1, x'_2, x'_3）は，$x_1 + x_2 + x_3 \equiv x'_1 + x'_2 + x'_3$ の条件下で次式によって与えられる．

$$x'_1 = 0.960(x_3 - x_2), \tag{14}$$

$$x'_2 = 0.685(x_2 - x_1), \tag{15}$$

$$x'_3 = 1.685x_1 + 1.274x_2 + 0.040x_3. \tag{16}$$

この式が当時最も新しかったケーニッヒらによる色座標（x'_1, x'_2, x'_3）から得られた反対色理論による色座標ということになる．

反対色理論における基本視知覚曲線 $\bar{x}'_1(\lambda)$, $\bar{x}'_2(\lambda)$ および $\bar{x}'_3(\lambda)$ を求めるには (14)～(16) 式に含まれる x'_1, x'_2, x'_3 をそれぞれが属する基本視知覚曲線 $\bar{x}_1(\lambda)$, $\bar{x}_2(\lambda)$, $\bar{x}_3(\lambda)$ に置きかえて波長毎の計算を実行すればいい．その結果を図 5 に示す．$\bar{x}'_1(\lambda)$ は青黄対の，また $\bar{x}'_2(\lambda)$ は赤緑対のそれぞれ基本視知覚曲線，$\bar{x}'_3(\lambda)$ は視感度曲線，すなわち目に感じる明るさの効率を分光感度の形で表現したものである．$\bar{x}'_1(\lambda)$ に関して考えると，波長 400～500 nm の領域は青がプラスで異化作用が，また 500 nm 以上では黄がマイナスで同化作用が優勢

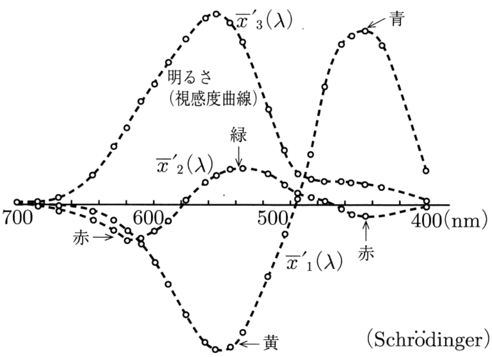


図 5　反対色理論の基本視知覚曲線．

ということになろう．一方 $\bar{x}'_2(\lambda)$ では，465 nm $< \lambda <$ 580 nm で緑がプラスで異化作用が，また $\lambda <$ 465 nm および $\lambda >$ 580 nm で赤がマイナスで同化作用が優勢である．しかしヘリングも指摘したように対をなす色のどちらを同化，どちらを異化と考えても本質的な違いはない．

ともあれ反対色理論では数量化が困難だった当時，3 原色理論によって得られた定量的データから，反対色理論の要となるべきその波長レスポンス関数を数値的に求めた功績は実に大きい．アメリカの心理学者 L.M. ハーヴィッチ（Hervich）と D. ジェムソン（Jameson）夫妻が打消し法という実験手法を開発して図 5 と似た傾向の特性を得たのは 1955 年であった[13]．

この論文[6]は彼の色彩論に関する最後のもので，1925 年 12 月 17 日にウィーン科学アカデミーで発表されたが，彼は当時チューリッヒ大学教授のポストにあって，後にシュレーディンガーの波動方程式と呼ばれることになる量子力学の基礎方程式の導出に向けた創造的活動の真っ只中にあった．翌 26 年の前半に発表された 6 篇の論文によって波動力学の根幹が築かれた．その第 1 論文がアナーレン・デア・フィジークに受理されたのは 1 月 27 日のことである．このような時期にどのような経緯で測色の研究を発表したりそれが直ちに印刷されたのか詳しいことは分らない．アナーレン・デア・フィジークに掲載された論文[6]には「この論文の印刷に要する費用はジェロームとマルガレーテ・ストンブル財団が負担した」と注記してあるところを見ると，このウィーン在の財団が何らかの形でシュレーディンガーに委託した研究の報告だったのかも知れない．J.R. オッペンハイマーが「かつて人間が発見した最も完全な，最も正確な，そして最も美しいもののひとつであろう」と絶賛した波動力学第 1 論文の傍に咲

いた月見草というところであろうか．

ご容赦を願う次第である．

5. 色差の数学モデルその他

色彩学や測色は極めて実用的な側面をもっていて，例えば商品の見本と実物の間の色の違いの許容限界を数値的に指定したいという産業と消費者双方から強い要請がある．これに応えて色の空間に距離を導入して色差を線素 ds で定義し，感覚的に色を識別できる閾値を例えば $ds=$ 一定 という条件によって数値化しようという試みがヘルムホルツ以来延々と続けられて来た．このような空間は一般に非ユークリッド・リーマン空間である．実際リーマン幾何学の創始者 G.F.B. リーマン（Riemann）は「この幾何学を現実の世界の中で適用できる対象は極めて少ない．恐らくその稀な例は物理的空間と色彩であろう」（1854）と述べている[14]．シュレーディンガーも参照文献 1) の第 3 報中でヘルムホルツの提案を改良した線素を導入し，これを用いて色知覚に特有の現象例えばアブニー効果[*1)]の説明などには成功したが，数式が複雑だったりうまく説明できない現象が見つかったりして広く採用されるには至らなかった．

彼のその他の小論文を手短かに紹介しよう．「明るい顔料の理論」ではスペクトル色に近い明るい光を反射する顔料の条件を定式化した．「視覚の発生」ではヒトの視感度特性が太陽光のスペクトルよりも短波長側にシフトしている原因を考察した．「星の色」では目の錐体細胞と桿体細胞の競合によって，地上の光源の色と星の色の違いの説明を試みた．後の 2 つの論文ともいわば思い付きの域を出ず定説となるには至らなかった．

シュレーディンガーが色彩論や測色の研究に没頭した時期は国際照明委員会（CIE）の活動が活発になり測色の国際規格化が推進されるようになる直前だった．CIE は 1924 年に比視感度 $V(\lambda)$ を制定し，1931 年には rgb 表色系と XYZ 表色系を制定した．それにともない，本稿で取上げた正 3 角形色度図も姿を消し，馬蹄形の色度図が専ら使われるようになった．しかし今回は，シュレーディンガーの貢献を歴史的文脈の中で紹介したかったので，あえて当時のグラフを使うことにした．波長目盛が現在とは左右逆なのも描き変えなかった．そのためまごつく方がおられるかも知れない．

*1)　例えば単色光と白色光の混合比を変えると色（厳密には色相）が若干変って見える現象．

参考文献

1) E. Schrödinger, 'Mein Leben, meine Weltansicht' (Paul Zsolnay Verlag, 1985), ペーパーバックス版 (DTV, 2006), 邦訳：『わが世界観』, 中村量空他訳（ちくま学芸文庫, 2002）.
2) E. Schrödinger, *Ann. Phys.* **63** (1920), 397–426, 427–56, 481–520.
3) E. Schrödinger, *Ann. Phys.* **62** (1920), 603–22.
4) E. Schrödinger, *Naturwiss.* **12** (1924), 925–929.
5) E. Schrödinger, *Naturwiss.* **13** (1925), 373–376.
6) E. Schrödinger, *Sitzber. k. Akad. Wiss. Wien, Math.–Naturwiss. Kl.* **134** (1925), 471–90.
7) E. Schrödinger, *"Die Gesichtempfindungen" in Muller–Pouillets Lehrbuch der Physik* **2/1**, 11*th ed.*, 456–560, Braunschweig: Vieweg (1926).
8) 金子隆芳：『色彩の科学』（岩波新書，1988）；大山正：『色彩心理学入門』（中公新書，1994）；村上元彦：『どうしてものが見えるのか』（岩波新書，1995）.
9) A. König und C. Dieterici, *Z. f. Psych. u. Physiol. d. Sinnesorg.* **4** (1892), 241–347.
10) 池田光男：『色彩工学の基礎』（朝倉書店，1980）.
11) L.M. Harvich: Color Vision (Sinauer Ass. 1981). 邦訳：鳥居修晃・和気典二訳『カラーヴィジョン—色の知覚と反対色説—』（誠信書房，2002）.
12) F. Exner, *Sitzber. k. Akad. Wiss. Wien. Math.–Naturwiss. Kl.* II*a* **127** (1918), 1829–1864, **129** (1920) 27–46.
13) D. Jameson and L.M. Harvich, *J. Opt. Soc. Am.* **45** (1955), 546–552.
14) B. Riemann, *Abhandlungen d. Konig. Gesellsch. d. Wiss. z. Götingen*, **13** (1868), 133. 邦訳：矢野健太郎『微分幾何学』（朝倉書店，1949）.

（つるた・ただお，元株式会社ニコン）

『生命とは何か』
1944 (1948) vs 2003 (2009)



金子　邦彦

1.『生命とは何か』——1944 からの半世紀

シュレーディンガーの『生命とは何か』[1]は，出版後30年以上もたって，大学2年生のときに岩波新書で翻訳を読んだ．というわけでその衝撃や影響を同時代で体験できた方たちとは異なり，歴史の彼方にある古典を，という気持ちで接した．残念ながら，そう強い印象を受けた記憶はない．遺伝子を非周期性結晶と予言したことで名高い，ということは読む以前に情報として持ってしまっており，またワトソン–クリックの論文からも四半世紀近く過ぎているわけで，その意味では犯人を聞いてしまってから推理小説を読む，といった状況に近かったからかもしれない．もちろん犯人をおいつめていくその論理の運びには感銘したのであるけれども．

一方，この本の後半部分は**生命は負のエントロピーを食べている**という有名なフレーズに収斂していく．出版とほぼ同時代的に体験された大沢文夫さんによれば[2]，遺伝情報を担う分子の予言には感心し，負のエントロピーは実質のないというふうに感じ取られたとのことである．ただし，70年代の統計力学は，むしろ，そのフレーズから派生したプリゴジンらを中心とした「非平衡として生命を」，という流れが打ち出された時代である[3]．この本を読んでいたころ，教養の講義ではじめてプリゴジンの名前を聞いて，微弱ながらもその洗礼を受けかけていた身としては，このメッセージに新しい物理学の方向があるのでは，と心を動かされたものである．しかし，今回『生命とは何か』を読みなおしてみるとたしかに前半の遺伝子の実体の予言に比して，後半部の具体性の乏しさの落差は目につく．さらに前半と後半の関係となるともっと曖昧になってくる．特別な分子の発明によって「秩序から秩序を」生んでいく連鎖が可能になったという表現からは，遺伝子を担う分子の存在が非平衡性を維持する構造の形成の源となっているようにも読めるのだけれども，いかにしてそれが可能なのかはよくわからない．

分子の性質を同定する手際の見事さと非平衡性というシステムレベルの議論のあいまいさとのギャップはやはり1940年代の時代精神と無縁ではないのだろう．もちろん**シュレーディンガー**であるから遺伝子の安定性には量子力学的状態の離散性が持ち出される．しかし，その考え自体はどこまで有効だったのだろうか．たしかに，量子力学が分子や物質の安定性を保証してくれる，という意味の安心感以上に，新たなる視座を与えているわけではない．化学結合論での手の数という見方が量子力学によって本質的にはなんら変更を受けなかったように．考えてみれば量子力学はそもそもマクロな熱力学との整合性をとるように作られたのだから，マクロレベルの安定性や非平衡性に対して量子力学が変更を迫らないのはむしろ自然だとも言える．

しかし，そもそも分子生物学の始祖デルブリュッ

クはニールス–ボーアの相補性の考えで生物を，というメッセージに動かされたのだから，やはり『生命とは何か』において量子力学への言及は避けられなかったのだろう．デルブリュックは，分子までおりていって，量子力学とは異なるタイプの，生命現象への相補性原理を見出そうという明確な企図を持っていたと思われる．しかし皮肉なことに，ワトソン–クリックの2重らせんによる相補鎖の発見，そしてそれによる分子生物学の確立は，デルブリュックをしてこんな子供だましの相補性を求めていたのではない，と嘆かせることになる[4]．

生命現象を考えると，細胞内の高分子にせよ，個体内の細胞にせよ，生態系内の個体にせよ，全体レベルの状況に依存して個々の要素のレベルが決まる．すると，部分と全体の相補性という見方が重要にも見え，その点では，量子力学での粒子（部分）と波（全体）の相補性とも相通ずるようにも見える．その意味で，量子力学で成功した勢いに乗って，新しい相補性を見出したいというのは物理から転じて分子生物学の始祖になった先駆者には当然の思いであったろう．

では，そのような部分と全体の相補性は，分子までおりていかないと得られないものなのだろうか？ 例えば，アインシュタインのブラウン運動理論[5]は，ミクロな原子の存在は認めるものの，その詳細は必要とせず，むしろマクロな熱力学や流体力学との整合性が鍵となる．その意味では，シュレーディンガーの前半部と後半部の相補性への扉は，分子生物学の詳細なる情報なくしても開かれ得るのかもしれない．

そのような考えがあったというわけでもないだろうが，70年代から80年代にかけては，自己組織化，散逸構造[3]といった形で，非平衡開放系で自発的に形成される空間的パタンや時間的リズムの研究，つまり「無秩序から秩序を」の側の研究が進展していった．もともとは，チューリング[6]が化学反応拡散系で一様状態の対称性が破れてパタンが形成され，これにより生物発生過程での形態形成が説明できる，としたことに始まる一連の研究は，物理，化学では大きな展開を見せたというものの，目標としていた生命科学のほうではあまり見向きをされずとどまっていた．同じころ，遺伝子発現解析が進むにつれ，この遺伝子が発現すると別の遺伝子の発現を活性化ないし抑制し，という連鎖の詳細が得られていく．発生生物学を例にとると，この間，ホメオボックスの発見[7]に象徴されるような著しい進展を見せた遺伝子側の研究と散逸構造は何のつながりもないままとなる．実際，表皮のパタンといった表面的なことではなくて，生物の形態形成の骨格となる問題にリズム，パタンが働いているという確認は90年代末のプルキエらによる体節形成での遺伝子発現振動の発見[8]まで待たなければならなかった．

この間，分子生物学は，ある意味，「秩序から秩序を」生んでいく過程の記述に華々しく成功したとも言える．しかしその連鎖の中に新しい物理を，という当初の目標は達成したとは言い難い．生物物理としては分子機械でのルースカップリング説という，大沢文夫の提唱[9]があったというものの，いまだ生命の持つ全体性，自主性といったシステムの物理学を形成するには至っていない．多くの場合，物理学は測定の新技術導入には大きな役割を果たしたけれども分子生物側のミクロな秩序と生物のマクロな状態の相補性の理解につながるような概念レベルの提案には至らないままとなっていた．

2. 新たなる波

しかし，この十数年で，生命現象への物理学的アプローチが，新しい次元に入って来たように見える．単に物理学を技術として使うのではなく**生物状態の現象論**あるいは**生物システムの統計力学**とでも言うべき分野の構築が始まっていると言えるかもしれない．この発展の背景には以下のような実験，理論の展開があると考えられる．

(a) 実験的技術の大幅な進歩

蛍光タンパク，マイクロアレイ（DNAチップ），フローサイトメトリ（セルソータ）等の技術の急

速な進歩があり，細胞内のタンパク量などのゆらぎや分布の定量的測定が（まだ不十分な点もあるとはいうものの）可能になった．それにより，これまででははしばしばあいまいな表現になっていた「生物の柔軟性」が「ゆらぎ」との関連で，定量的な科学の対象になってきた．

(b) 統計物理特にマクロ現象論の進歩

70 年代後半以降の統計力学の進歩により，「ミクロの詳細によらずに普遍的性質を理解する」立場が確立した．これとともに，確率過程や力学系の理論が進展した．一方，大自由度力学系の研究で，内部状態を持った要素が相互作用する際の基本的性質が明らかになってきた．これによって，これまでの「単純化しすぎて本質を外した」轍を踏まずに，生きている状態の現象論を物理学として定式化できる可能性が出てきた．

とはいえ，従来の物理を，計測や解析の「技術」として用いて生物にあてはめるだけでは，これまでの轍を踏むことになる．また，データをもとに詳細な生物モデルを作る際に，力学系や確率微分方程式の手法を用いる，といったことも盛んであるが，もし単なる応用だとすれば，これも「理論物理学」としてさして楽しいわけではない．では，ミクロとマクロの階層間の相補性をとらえた，生命システムの普遍的な理論はいかにして可能なのだろうか．

熱力学が「平衡状態とその間の遷移」という切口を作ることにより，自然の普遍構造を明らかにしたことを思い出そう．これに対し，生命システムには，分子の複製，細胞の増殖，個体の増殖で見られるように，すべての階層で「増える」という潜在的性質を持った「状態」である．そこで，「(定常）成長状態とその間の遷移」という切口で，生命の普遍的性質の一面を切り出せないだろうか？もちろん，こうした考えの先駆はダーウィンの進化論にある．ただ，現在の数理的進化理論では，増える要素の内部自由度やダイナミクスは考えずに，要素（個体）に適応度（子孫を残す度合）だけを与えて記述している．これに対して (a) (b) の進歩を踏まえて「内部状態を持った要素の（定常）成長状態へのマクロ現象論＋統計力学」を作っていけば，生命の持つ，複製，代謝，遺伝，分化，発生，進化への普遍的性質が理解できるのではないだろうか．

この方向の研究の進展について，畏れ多くも，シュレーディンガーと同名の書を 59 年後に著した[10]（原稿を依頼されたのも，そのためなのだろう）．その内容については拙著を参考にしていただくとして，ここでは，シュレーディンガーの提示した問題と関連する点について少しだけ論じたい．

(i) *遺伝を担う分子と細胞（個体）——ミクロ‐マクロの関係*

遺伝子が生物のマクロな秩序をいかに形作っていくのかという問題を考えるために，そもそも**遺伝情報を担う**とは何を意味するのかにたちかえって考えてみた[10,11]．分子の構造という視点ではなく，分子が細胞複製の中で果たす役割に関する運動論的な観点からの考察である．分子が遺伝を担うと見なせるためには (A) 相対的に細胞の性質を強くコントロールする (B) それが細胞複製を通してよく保存されるという 2 つの性質を満たすはずである．ところが，核酸（DNA）とタンパクの関係を考えると，互いに互いがないと増えられないという相互依存的なもの，つまり相互触媒関係を満たすものである．では，互いが必要なのに，なぜその一方の分子，つまり核酸の側が遺伝を担う分子として (A) (B) の要件を満たすようになっているのであろうか．そのために 2 種類の分子が相互に触媒しながら増えていく系を理論的考察および数値実験により調べた．その結果，相互触媒で増えていくシステムでは，合成が遅くて少数個しかない分子の側が (A) (B) を満たすようになることが見出された．このような少数分子が複製の維持と進化に果たす役割は，人工複製系の実験でも明らかにされている．この結果は，非周期性結晶と見なせる高分子が情報を蓄えるというシュレーディンガーの見方に対して，蓄えられたものが他の分子との関係において遺伝情報として働くため

の運動論的考察を与えたものであり，分子が細胞複製をコントロールするというミクロ–マクロ関係の理解へ向けた第一歩である．

(ii) *ミクロとマクロの相補性*

ミクロとマクロという点に関して言えば，生命システムは一般に内部状態を持つ要素とその集団という，異なる大きさや時間スケールを持つ階層からなる．分子の複製と細胞の複製，そして多細胞からなる個体の発生といった階層である．これらの間には大きなスケールの違いがあるにも関わらず，各レベルで整合した複製過程が続いている．このような，**秩序から秩序**への再生産過程が各レベルで続くためには，何か普遍的な拘束があるのではないだろうか．

こうした観点にたって，まず，多くの触媒反応のネットワークからなる細胞モデルを考え，「自分とほぼ同じ組成を持つ細胞を複製し続けられる」状態がどのような性質を持つかを調べた．その結果，この細胞が定常的に自己複製していく場合，細胞内の各成分量を多い順に並べると，その順位と量が逆比例するという法則が見出された．一方で，複製を続けた多くの細胞にわたって，それぞれの成分量の分布を求めると，対数正規分布に従う．これらの法則は細胞の状態が臨界点に近いことの理論的帰結であり，モデルの詳細によらず，自己複製する細胞では常に成り立っている．さらには実験的にも，現在の様々な細胞に対して，この両法則が，遺伝子発現を測るマイクロアレイや蛍光タンパクの量分布の測定によって確認された[10,12]．注意すべきは，これらの性質が，個々の分子の複製と細胞全体の複製が両立するという条件下で導かれている点である．つまり，「増えていく」という生命システムの満たすべき条件のもとで，個々の要素と全体が整合しているということが拘束を与えている．

要素と全体がともに増えられる，という要請は，細胞とその集団である多細胞生物でも成り立つ．一般に細胞が分裂していけば，まわりに細胞が密集してくるのでそれらは互いに影響を及ぼしあう．つまり，多細胞系を考えなければならない．そこで，内部に触媒反応ネットワークを持つ細胞が化学成分のやりとりを通して相互作用するモデルを調べた．この結果，初期の細胞（幹細胞）が成分の（カオス的な）振動を示すと，自発的な細胞分化が生じて，1 細胞増殖と細胞集団増殖の整合性がとれることが見出されている[10,13]（なお，カオス振動の実験的な検証はまだであるが，幹細胞で遺伝子発現が振動し，その状態がゆっくり遷移していくことは最近見出されている[14]）．

(iii) *遺伝子と表現型の関係*

遺伝子が個体の発生過程のダイナミクスの規則を与え，それによりマクロな表現型が決められる．このようにミクロからマクロへの流れが決められている一方で，進化は表現型を通して行われ，その選択を通して遺伝子が選ばれて次世代へ伝わる．この進化過程が定常的に続いていくのであればマクロからミクロへの過程が生じる．ワディントンが遺伝的同化[15]と呼んだように．

要するに，遺伝子 → (発生) → 表現型 → (進化) → 遺伝子という循環を通して，ミクロとマクロの相互関係が形成されている．ここで，発生過程の部分はダイナミックな過程で，そこにはノイズが伴う．そのために同じ遺伝子を持った個体でも表現型はゆらぐ．発生過程のノイズによる非遺伝的ゆらぎである．一方で，進化はランダムな突然変異と選択からなるので，遺伝子の分散による表現型のゆらぎが生まれる．遺伝子 → 発生 → 表現型の過程がどんなものでもよいのであれば，この 2 種類のゆらぎの間に特別な関係はないはずである．しかし，適当な発生過程を含むさまざまなモデルの進化実験を計算機内で行ってみると，進化を通して 2 つのゆらぎの間に比例関係が生じてくる．理論的にも，もし上記の循環過程が定常的にまわり，安定した進化が続くという条件を課すことで，両者の間の比例関係を導くことができる[10,16]．

実は，このような遺伝子レベルと表現型レベルの整合性の考え方の源流は，ミクロとマクロの整

合性によってブラウン運動の理論を導いたアインシュタインに遡る[5]．これにより，揺動と応答の間の比例関係が導かれたのであった．進化の場合，集団遺伝学により遺伝子によるゆらぎと進化の速度の比例関係が示されているので，上で述べた比例関係から，結果として，非遺伝的な表現型のゆらぎと進化速度の間の比例関係が示される．つまり，発生過程でのノイズによって各個体の性質がどれだけゆらぐかの度合いと環境に応答してその性質がどれだけ進化しやすいかの度合いが比例している，という，進化揺動応答関係が導かれる．

これと関連して，大腸菌の中に導入したタンパクの蛍光を強めるという人工進化実験を行った[17]．蛍光タンパクを合成する遺伝子を大腸菌に導入し，この大腸菌に世代ごとに突然変異を加えていって，より強く蛍光を発した大腸菌を選択していく．ここで同じ遺伝子を持った細胞でも蛍光の度合いは一定でない．この蛍光の強さの分散を揺動，遺伝子の変異による蛍光の強さ（の平均値）の上昇を応答として，両者の関係を調べてみた．実験結果によれば，この両者に正の相関が見出され，揺動応答関係を支持するデータが得られている．

以上のような，マクロな表現型のゆらぎと進化の関係や表現型の安定性に関する研究は最近広く進められている．一方で，遺伝子発現機構のミクロな研究も盛んであるが，理論的にはミクロ–マクロの対応関係やその安定性の研究が注目されている．こうしてみると，シュレーディンガーの前半部と後半部の関係は，ミクロ側におりていくのではなく，ミクロ–マクロ間の整合性を追求することで見えてくるのではないだろうか．

(iv) *ふたたび非平衡問題へ*

では，**負のエントロピー**を食べていかねばならないというシュレーディンガー後半部の問題はどうなったのであろうか．もちろん，生命システムの状態は熱平衡状態ではなくて非平衡条件下での流れを通して維持されているのは確かなのであろう．ただし，生命系の場合，外部の誰かが非平衡条件を課してくれるわけではないので，その条件は自身が作り，それが分裂を通して伝搬していかねばならない．生命の起源を考えれば，もちろん，外部にある何らかのエネルギー流がその前段階として必要だったのであろうが，それを維持するための内的な構造も形成されねばならなかっただろう．意外なことに，非平衡開放系があれば構造が作られる，という散逸構造での研究の進展[3]に比して，非平衡条件がいかに再生産されていくのか，という研究問題はあまり扱われていない．ここで植物のタネが長期にわたって熱平衡状態に落ちないこと，あるいはバクテリアなどで増えずに「眠っている」ような状態が長期存続することを思い起こしてみよう．そうすると，そもそも外部からのエネルギーや物質の流れがあまりない閉ざされた系でも，非平衡状態が長期維持されていると考えられる．一方で物理においてもガラス状態のように容易に平衡状態に落ちない状態が存在している．では，複雑な化学反応の集合系でそのような非平衡状態維持は可能なのだろうか．触媒反応の集まりからなる系のシミュレーションからなる系でそうした状態が普遍的に存在することを最近見出した[18]．ある成分の量とそれを緩和させるための触媒の量の間に負の相関があることで非平衡性の維持が長期間続くのである．この状態が再生産されていけば，熱平衡に落ちることを先送りした，**秩序から秩序へ**の「自転車操業」が可能になるだろう．

3. まとめにかえて

19 世紀に成功をおさめたマクロな熱力学とダーウィンの進化論に比して，20 世紀は物理では量子力学，生物学では分子生物学というように，ミクロへと向かう潮流が席捲した時代であった．シュレーディンガーの本の前半部の煌めきはその産物とも言えよう．しかし生命を理解する上では，後半部のあいまいさをいかに科学として成立させていくかは避けられない課題であろう．一方で生物学者側でも，分子を追うだけでなく，適応性，安定性，進化性といった，マクロなシステムの性質をゆらぎやダイナミクスと結びつけて理解しよう

という潮流が現れ，先駆者，ワディントンの再評価も急速に進んでいる[19]．ミクロとマクロの整合性を真剣に考えたアインシュタインの精神を受け継いで，シュレーディンガーの残した課題に応え，生きている状態の理論を目指していきたい[20]．

謝辞：ここで触れた進化に関する研究はアインシュタイン奇跡の年100年記念（2005）から始まり，ワディントン生誕100年（2007）を経て，本年ダーウィン生誕200年へと進めてきているものである．インスピレーションの源となった巨人たち，それから，古澤力，四方哲也，粟津暁紀，高木拓明の各氏に感謝したい．

また本篇脱稿後に出版された書評（和田昭允，「蛋白質，核酸，酵素 **54**」(2004) 879）でも拙著[10]をシュレーディンガー本[1]と並べて論じていただいた．心から感謝するとともに期待にそうべく，一層，チャレンジしていきたい．

参考文献

1) E. Schrödinger, “What is Life” 1944（翻訳『生命とは何か』は1948年版．岩波新書（現在は文庫））．
2) 大沢文夫「蛋白質，核酸，酵素 **49**」(2004) 593:(拙著 10) の書評．その第2版の扉に再録されている)．
3) G. Nicolis and I. Prigogine, “Self-organization in Nonequilibrium Systems” (Wiley, 1977)（翻訳，『散逸構造』，岩波書店）．
4) E.P. Fischer and C. Lipson, “Thinking about Science: Max Delbruck and the origins of molecular biology” 1998, W.W. Norton & Co.（翻訳，『分子生物学の誕生—マックス・デルブリュックの生涯』，朝日新聞社）．
5) Einstein A., Investigation on the Theory of of Brownian Movement, (Collection of papers ed. by R. Furth), Dover, 1956 (republication from 1926). Einstein 論文選集（共立出版）に関連論文が訳されている．
6) Turing, A.M. (1952). The chemical basis of morphogenesis *Phil. Trans. Roy. Soc. B*, 237, 37–72.
7) W. Gehring, “Master Control Genes in Development and Evolution: The Homeobox Story”, Yale Univ. Press, 1998（翻訳，『ホメオボックスストーリー』，東京大学出版会）．
8) Palmeirim I, Henrique D, Ish-Horowicz D, Pourquié O. 1997. Avian hairy gene expression identifies a molecular clock linked to vertebrate segmentation and somitogenesis. *Cell* 91:639–648.
9) 大沢文夫『講座 生物物理』，丸善，1998.
10) 金子邦彦『生命とは何か—複雑系生命論序説』，東京大学出版会，2003，第2版は副題 複雑系生命科学へ (2009) ただし，英語版の題は “Life: An Introduction to Complex Systems Biology” (Springer 2006).
11) Kaneko K, Yomo T. 2002. On a kinetic origin of heredity: minority control in replicating molecules. *J. Theor. Biol.* 312:563–576.
12) C. Furusawa and K. Kaneko; Zipf’s Law in gene expression, *Phys. Rev. Lett.*, 90 (2003) 088102: C. Furusawa, T. Suzuki, A. Kashiwagi, T. Yomo, and K. Kaneko; Ubiquity of Log-normal Distributions in Intra-cellular Reaction Dynamics; *BIOPHYSICS*, 1 (2005) 25.
13) Furusawa, C. and Kaneko, K.; Theory of Robustness of Irreversible Differentiation in a Stem Cell System: Chaos Hypothesis; *J. Theor. Biol.* 209 (2001) 395–416; Chaotic Expression Dynamics Implies Pluripotency: When Theory and Experimentation Meet, *Biology Direct* 4 (2009) 17.
14) Shimojo H, Ohtsuka T, Kageyama R: Oscillations in Notch Signaling Regulate Maintenance of Neural Progenitors. *Neuron* 2008, 58: 52–64; Chang HH, *et al.*: Transcriptome-wide noise controls lineage choice in mammalian protenitor cells. *Nature* 2008, 453:544–548.
15) Waddington C.H. (1957). The Strategy of the Genes. London: George Allen & Unwin.
16) Kaneko, K. and Furusawa, C: An evolutionary relationship between genetic variation and phenotypic fluctuation, *J. Theor. Biol.*, 2006, **240**, pp.78–86; Kaneko K.: Evolution of robustness to noise and mutation in gene expression dynamics, *PLoS ONE*, 2007, **2**, e434.
17) K. Sato, Y. Ito, T. Yomo, and K. Kaneko: On the Relation between Fluctuation and Response in Biological Systems; *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 100 (2003) 14086–14090.
18) A. Awazu and K. Kaneko: Relaxation to Equilibrium Can Be Hindered by Transient Dissipative Structures *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 258302; “Glassy” Relaxation in Catalytic Reaction Networks, プレプリント．
19) Kirschner, M.W., and Gerhart J.C., “The Plausibility of Life”, Yale Univ. Press, 2005; S.F. Gilbert and D. Epel, “Ecological Developmental Biology”, Sinauer Assoc. 2009.
20) K. Kaneko: “Relationship among Phenotypic Plasticity, Genetic and Epigenetic Fluctuations, Robustness, and Evolovability; Waddington’s Legacy revisited under the Spirit of Einstein” *J Biological Science*, in press.

（かねこ・くにひこ，東京大学大学院総合文化研究科，
ERATO 複雑系生命プロジェクト）

どこからどこへ

私は一過性の存在ではない

早川 博信



シュレーディンガーが晩年を過ごした家．筆者撮影，1983 年．

1. はじめに

オーストリアの南チロル地方のブレッサノーレにシュレーディンガーのご令愛のルース・ブラウニツァー夫人を訪ねたのは，1983 年の夏であった．そのときのことは『わが世界観』(ちくま学芸文庫) の「あとがき」に書いたので割愛するが，以来ブラウニツァー夫人には新年の挨拶状だけは欠かさず出していた．夫人からはいつも 12 月の半ばになるとクリスマスカードが届き，それは今でも続いている．

シュレーディンガーがインドのヴェーダーンタ哲学に深い関心を持っていたのはよく知られているが，今回の原稿を書くにあたり，夫人に，尊父が東洋の思想に関して何か語ったことを聞かれませんでしたかと手紙を出した．ほどなく返信が届き，その中に次のようなことが書かれていた[1]．

「私の父がアジアの哲学について言及したり語ったりしたことはなかったように思います．彼はインドの哲学に強い興味を持っていました．これは私の夫がずいぶん昔の日記の中に見付けたものです．父がこれを書いたのは亡くなる 20 年ほど前です」．また，手紙に添えられていた夫人の講演記録には，「この詩が発見されたのは埋葬後 40 年以上経ってからであり，私たちは彼の願いをかなえた」[2] とあった (図 1)．

シュレーディンガーが日記に書いた，遺言とも言えるものは下記のとおりである．

Denn das, was ist, ist nicht, weil wir es fühlen.
Und ist nicht, nicht, weil wir es nicht mehr fühlen.
Weil es besteht, sind wir,und sind so dauernd.
So ist denn alles Sein ein einzig Sein.
Und dass es weiter ist, wenn eines stirbt,
Sagt Dir, dass es nicht aufgehört zu sein.

Bitte das auf mein Grab in Olfarbe auf ein einfach Holzbrette (Z. Bsp einen Kistendeckel) gemalt. Aber das Brette ein bissel mit dem brauner Zeug imprägnieren, damit es nicht gar zu rasch fault. Das genugt.

E. Schrödinger 1942

なぜなら，あるものはわれわれがそのものを感じるが故にあるのでない．
そして，そのものがないのはわれわれがそのものを感じないが故ではない．
そのものが存在するがゆえにわれわれはある．しかも，持続的にある．
それゆえ，あらゆる存在は，すべて唯一なる存在である．
そしてある人が死んでも，唯一なる存在があり続けるということは，
その人が存在をやめたのではないということを君に告げているのだ．

私の墓に簡単な木片 (たとえば箱のふた) にペンキでこれを書いて下さい．けれども，木片があまりにすぐ腐朽しても困るので，少しばかりモルタルを塗って下さい．あとは思い残すことはありません．

1942 年とメモがあるが，それはシュレーディンガー 55 歳のときである．20 世紀の天才物理学者は自分の死の 20 年ほど前に，ある人の死はその人が存在をやめたことではないと確信をもって言



図1　シュレーディンガーの墓碑．D.A. Kirschner 氏撮影，2005 年．

明している．1951 年に出版された『Science and Humanism』には，「私はこの世に生まれてきた．どこから来たのかどこに行くのか私が誰なのか知らない．これはあなたにも全ての人にも同じこと．われわれが真剣に訊ねるのはこのことである．それが科学であり，学ぶことであり，知ることであり，全ての人間が精神的な努力をする真の源泉である」[3] とある．

シュレーディンガーは若いころから哲学に深い関心を持っていた．「1918 年，私が 31 歳のときに，チェルノウィッツ大学の理論物理学のポストに招聘される確かな見込みがあった．（中略）そこで誠実に理論物理学の講義を始めるつもりであった．さらに哲学の研究に打ち込むつもりであった．それというのも，当時私は，スピニーザ，ショウーペンハウアー，マッハ，リヒャルト・ゼーモン，リヒャルト・アヴェナリウス等の著作に傾倒していたからである．ところが私の守護天使が介入して，ほどなくチェルノウィッツはオーストリアに属さなくなってしまった．そのため哲学の研究はできなくなり，私は理論物理学に固執せざるを得なくなってしまった．」[4]．

哲学的な問いは果てしのない問いである．それは立てる問いではなく，気が付いたらその問いに捕まっていた，そのような問いである．我々はどこから来てどこへ行くのかとシュレーディンガーは問う．あるいは人と人とはなぜ同じ世界にいて通話可能（と思っているの）かとシュレーディンガーは問う．これらの答えが何であったのか，著作の中の言葉を追って見つけられればと思う．

2. 心と物――越えられない絶対的な障壁

シュレーディンガーがその哲学観を述べたもので邦訳があるのは，『生命とは何か』，『精神と物質』，『自然とギリシャ人』，『わが世界観』の 4 冊である．前 3 冊が講演を元にしたものであるのに対し，『わが世界観』は 2 編のエッセイが 35 年間の隔たりを以て一つになって刊行された点で特異な書物と言える．前半の「道を求めて」が書かれたのが，波動力学の最初の論文が出された 1926 年 1 月の数カ月前，1925 年の秋であり，その後 35 年を経て後半の「現実とはなにか」が書かれた．したがって，それは「長い間私の胸に抱いてきた心からの願いを真に成就させるものとなったのである」[4]．

「どこからどこへ」や「私とはだれだ」の問いは，様々な問題を引き連れている．この世界とそこにいてそれを理解する私とその世界との関係，私とあなたは絶対的に別の存在であるのに一つの世界にいるという保証の出処，心と物の 2 つの全く異なった領域における事象が相互作用することはあるのか可能なのか，などなど．「はじめに」にある詩を読むと，1940 年代ですでにこれらに対する答えへの道筋は出ていたのでないかと思われる．死の 2 年前に出た『わが世界観』の後半部「現実とはなにか」の語り口調がいくぶん饒舌でのんびりと

しているのは，そのことを反映しているのかと思うが，しかし，テーマは深刻で困難なものばかりである．『自然とギリシャ人』，『精神と物質』，『わが世界観』で，上述の様々な問題が繰り返し取り上げられる．

「今日の科学的世界像の独特な基本的様相」を問題にして，シュレーディンガーはギリシャまでさかのぼる．ギリシャに起源を持つ科学はこの世界を記述するにあたり，世界は理解可能であるとした．理解可能とは何か．それは「さまざまな遠く離れた知識領域それぞれにおける発見の間には事実関係が存在し，そしてそれらとの関係と最も基本的な一般概念との間にもきわめて顕著な関係がある」[5]ということである．これはギリシャの考え方であり，我々の現代の思考法全体はこのギリシャの考え方に基づいている．科学のもう一つの特色は客観化であり，それにより「無意識的にほとんど気付くことなく，描かれるべき描像から自分自身を，自己の人格を，知覚主体を，無視または削除することによって，自然を理解するという問題を単純化」[5]してしまった．

そこではどういうことが起こるのか．「科学的世界像は生起するすべてについて完璧な理解を与えてくれるが，それは全現象を時計仕掛けの振る舞いとして思い浮かべさせるものである．そこには現実にはあるはずの意識，意志，努力，苦痛，歓喜，責任などがない．科学は我々が古き唄になぜ涙するかについて，粗密波が耳に達した瞬間から，ある腺が目に液体を分泌するに至るまで，感覚中枢や運動中枢に生じる全てについて完全に詳細に記述しうるが，この過程に伴う歓びや哀しみの感情については科学は無知であり，したがって沈黙している」[5]．あるいは，「ところで，私たちの頭蓋骨は空っぽではない．しかし，頭ということでそれが喚起する熱烈な関心にもかかわらず，私たちがそこに見出すのは，こと生命や魂の感情などに関しては，まったく何もないのです」[6]

身体のどこを探しても，脳のどこを探しても魂は見付からない．

しかしこれは一方で，「これは深い思索に立て



E. シュレーディンガー（1887–1961）．1930 年中頃，オックスフォードにて撮影（ブラウニツァー夫人提供）．

ば，私には慰めに思える．もしあなたが友人の死に対面し，強く彼の不在を感じるとき，この身体は本当は彼の人格の居場所ではなく，それがどこにあるか探すための象徴的なものにすぎないと理解することは，痛みを和らげることにならないだろうか」[6]．

心と物の障壁を越えるためにシュレーディンガーが選んだのは，「個別的存在の本体（我）が大宇宙の本体たる究極原理（梵）に一致する」[7]というヴェーダーンタの「梵我一如（＝不二の説）」の教義だった．

3. シュレーディンガーのヴェーダーンタ

ヴェーダ（インドの最古の宗教文献でバラモン教の根本聖典）文献の最後の部門を形成するのがウパニシャッドで，ヴェーダ文献の最終部門であるからしばしば「ヴェーダーンタ」（ヴェーダの末尾（アンタ））と呼ばれるが，後にはこの呼称が「ヴェーダの極致」の意味に解釈される[8]．

ウパニシャッドは，古代インドの神秘思想の書であり，シュレーディンガーはショーペンハウアーの著作を通じてそれを知った．「ショーペンハウアーはウパニシャッドの中に，彼自身の思想が表現されているのを見いだして感動したのであった．（中略）ショーペンハウアーはウパニシャッドに心酔すると共に，ヴェーダーンタ哲学，大乗仏教思想にひきつけられている．彼は『リグ・ヴェーダ』第1巻をローゼンの翻訳によって読んだが，「かなり素朴な星辰崇拝の様相を持った祈祷と儀式から成る」その宗教に関心を示さなかった」[8)]．後述するように，シュレーディンガーもウパニシャッドの世界観は感動を以て全面的に受け入れているが，その宗教的側面には躊躇しているところがある．

シュレーディンガーがヴェーダーンタに直接言及しているのは，『わが世界観』の「道を求めて」の第5章「ヴェーダーンタの世界像」と「現実とはなにか」の第4章「不二の説　光と陰」，および『精神と物質』の第4章「算術上の矛盾――精神の単一性」のところである．

「道を求めて」の第5章「ヴェーダーンタの世界像」は，次のような言葉で始まっている．

「哲学にとって固有の困難さは，観察し思考する個々人の，空間的かつ時間的な数多性にある」．人それぞれがそれぞれに観察し思考し，そしてそのような人々が空間的にも時間的にもいっぱいいることが，なぜ，“哲学にとって固有の困難さ”になるのか．それは，そのようなあり方では，あなたの世界と私の世界とが共通の一つの世界を共有している保証がないことになるからだろう．確かなものの根拠がなく，互いの通話可能性も出てこない．しかし，このような「多数」は幻影で見かけにすぎず，本当は一つしかない，とシュレーディンガーは言う．心は時を越え場所を越え一つであると，このあと出てくる．

第5章での叙述を引き続き見ていく．「われわれが知覚する数多性は，たんなる仮象にしかすぎず，決して現実のものではない．」ヴェーダーンタの世界像の根拠となる例を自分の体験を元に描いている．場所はアルプスの山岳地域．「君が見とれているものはすべて，君が存在する以前から幾千年もの間変わることなくそこにあった．君がいなくなったのちも幾千年変わることなくそこにあるだろう．（中略）おそらく数百年前にも誰かがこの場所に座り，君と同様に敬虔な，そして悲哀の心をうちに秘め，暮れなずむ万年雪の山頂を眺めていたことだろう．彼は他の誰かであったのだろうか．それは君自身でなかったのか．君の自我とは何なのか．」認識し知覚し意志する君が，それゆえ，突然無から生じたとは到底思えない．これら認識や知覚や意志は本質的に永遠で不変で，すべての人間，否すべての存在にとって数量的に一つである．通常の理性では信じがたいことだが，「君は万有の中の万有である（du bist alles in allem）」．永遠にそして常にただこの今だけがあり，すべては同じ今であり，現在とは終わりのない今である．

山が好きでもう40年以上登山を続けている筆者にはここのくだりに心から納得できる．読んでいて楽しい．この永遠の今という真理の感得こそが，倫理的に価値のあるすべての行為を基礎づける．「道を求めて」の第5章はヴェーダーンタに対する全面的な賛辞で終わっている．しかし，35年を経て書かれた「現実とはなにか」の第4章では，「不二の説　光と陰」とタイトルに示されているように，「陰」の部分についての記述がある．

シュレーディンガーは，インドの哲人が導いた真摯な結論は二つあり，一つは倫理的なもの，もう一つは終末論的なものであり，後者の例として次の4行詩の3, 4行に言及する．

> 意によってのみ観察せらるべし，
> この世においてなんらの別異あることなし．
> この世においてあたかも別異あるかのごとく見る者は，
> 死より死へ移りゆかんのみ．
> （『ブリハッド・アーラヌヤカ・ウパニシャッド』第4章，第4節，第19句．辻直四郎訳）

「生誕と死滅の永劫の輪廻から脱却するための不可欠の条件は，この神秘的な教理を真に自らのものとし，口先だけで同意するのでなく，全霊を込

めてこれを了解しなければならないので，これには考えさせられてしまう．これは，救済の可能性が一度限りの短い人生に限定されていないとはいえ，認識による救いであり，知性のみならず瞑想のための余暇を前提にしている貴族的なものであり，信仰による救済や神の恩寵の選択による救いよりも悪い」と，シュレーディンガーは言う．ヴェーダーンタ的世界観を自らのものとしたい人は，輪廻を考えるよう誘ってくるものを遠ざけたほうがいいと．

筆者は，輪廻を自らのものとするのは「認識」や「瞑想」によるのでなく，したがって貴族的なものではなく，その伝統の中にあっていつの間にか身に付くことのように思えるが（東南アジアの人々が，輪廻を実体あるものとしているのをよく聞く），輪廻の思想を避けるように言っているのは，「私たちの現在の考え方が東洋思想からの輸血を必要としているが（中略），輸血の際には常に凝固が起こらないよう最大の用心が必要である．科学的な考え方が辿り着いた理論的な確かさを失いたくない」[6] からだろう．

輪廻の思想は受け入れられなかったが，シュレーディンガーがヴェーダーンタの梵我一如の世界観を自らのものとしたことは間違いない．

4. 科学と宗教

「科学と宗教」は，『精神と物質』の第５章のタイトルである．この書物は六つの章からなり，それらは，それぞれ，「第１章，意識の物理的な基礎」，「第２章，知力の未来」，「第３章，客観化の原理」，「第４章，算術上の矛盾——精神の単一性」，「第５章，科学と宗教」，「第６章，感覚的性質の不思議」である．第５章以外は，各章のタイトルはそこで論じられている内容の要約となっているが，第５章だけはそうではなく，そこでの中心課題は時間論である．筆者は宗教を取り上げるのなら「信」の問題は避けがたいことだと思っているが，この章で，宗教は，超越的なものをたてて，それと私との関係を「信」を介して論じるような仕方で論じられていない．これはシュレーディンガーの宗教観から来ているのだろう．時間からの解放がシュレーディンガーの主たる関心の一つであり，それによって救済が得られるという想いがあったように思う．

この章の始めで，科学はその数々の発見により，「あの世」や「死後の世界」のような，この世以外にその場所を特定する迷信を根絶することには役に立ったが，しかし，科学が宗教に対して行った最も重要な貢献は時間の概念を発展させたことであると言っている．もっとも，シュレーディンガーは，天国というような言い方で想定されている理念まで否定しているのでは決してなく，それは「神聖なものとしての地位」を与えられると明言している．

「これまで述べたことはむしろ精神の根源に関係したことである．そこにはいくつかの非常に興味深いポイントがある．“私たちはいったい誰なのか，私はどこから来てどこへ行こうとしているのか”．このような当惑させられる疑問を乗り越えるために科学が果たした最も重要な貢献は，——あるいは，少なくとも私たちの心を安らかならしめるために——科学が成した最も評価されるべき助けは，時間の概念を漸進的に発展させてきたことである」[6] ここにも，「どこからどこへ」の問いが出ている．

以下，この章ではプラトン，カント，アインシュタイン，およびボルツマンの時間論に言及される．そのいちいちについて詳細に引用するスペースはないが，タイトルにある宗教と関係付けて読むなら，常識的・経験的な時間概念は必ずしも普遍のものでなく，時間が役割を果たさないような表現形式においては「あと」という概念は意味をもたなくなり，「生命がなくなったあと」という言い方は何を問題にしているのか，問いかけ自体が無意味になると言っているように思える．

そして結論として，「私たちが心のうちで自ら築き上げたものは，心に独裁的な力を，すなわちそれを前面に押し出したり，あるいは消し去ったりする力を，ふるうことはできないと私は思う．し

かし，幾人かの人はそれを神秘主義と呼ぶだろう．物理学の理論はある基本的な仮定に依っているという点で，常に相対的なものであるという事実を認めるにしても，われわれは，現段階においては，物理学の理論は，*心*が*時間*によって破壊されるようなことはない（the indestructibility of Mind by Time）と確かに示唆していると，主張してもいいのでないかと思う．」[6)]

5. 終わりに

「私は誰でどこから来てどこに行くのか」の答えは，「私は*誰*かではなく，どこからか来たのでなく，どこかへ行くのでもない」ということでなかっただろうか．今ここにある唯一なる存在，死ぬことでそれが消滅することなどない存在，それが答えであったと思う．

冒頭に掲げた詩を知ったのは，ブラウニツァー夫人から送られてきた招待講演の原稿（それらは三つあり，ダブリン，ニューデリー，ブルノで話されている）の一つからであった．講演でブラウニツァー夫人は，娘が見た父親の家庭における様々な姿を思い出をこめて語られている．これらの貴重な記録をほとんど紹介することができなかった．紙面の関係とはいえ残念と言うしかない．

William T. SCOTT 著『ERWIN SCHÖREDINGER An Introduction to His Writing』[9)]は直接引用しなかったが，拙稿を書くに当たって大変参考になった．シュレーディンガーの「不二の説」や「客観化」に関して充分な説明がなされていないという批判がそこには出ているが，「不二の説」についてシュレーディンガーは「すでに容認したように，われわれは論理的に演繹可能なものを問題にしているのでなく，神秘的な形而上学を問題にしているのである」[4)]と言っている以上，上記の批判は平行線を取らざるを得ないように思う．

拙稿ではシュレーディンガーの広範囲な思索の一部を紹介したに過ぎない．これが，読者に，シュレーディンガーの哲学について原典にあたって読み解いていくきっかけを与えることができれば幸いである．

謝辞

「はじめに」の墓碑銘のドイツ語の邦訳には，小林澈郎氏を通して，東北大学名誉教授（独文学）の小栗浩先生のお世話になりました．小栗先生に厚くお礼申し上げます．

参考文献

1) ルース・ブラウニツァー夫人からの私信（2009 年 2 月）．
2) ルース・ブラウニツァー夫人の Brno における招待講演（2005）から．
3) Erwin Schrödinger『Science and Humanism』(Cambridge University Press, 1951 年)．
4) エルヴィン・シュレーディンガー（橋本芳契監修，中村量空・早川博信・橋本契訳）『わが世界観』（ちくま学芸文庫，2002 年）．
5) エルヴィン・シュレーディンガー（河辺六男訳）『自然とギリシャ人』（工作舎，1991 年）．
6) エルヴィン・シュレーディンガー（中村量空訳）『精神と物質』（工作舎，1987 年）．
7) J. ゴンダ（鎧　淳訳）『インド思想史』（岩波文庫，2002 年）．
8) 服部正明『古代インドの神秘思想』（講談社学術文庫，2005 年）．
9) William T. SCOTT『ERWIN SCHÖREDINGER An Introduction to His Writing』(UNIVERSITY OF MASSACHUSETTS PRESS, 1967 年)．

注記：ブラウニツァー夫人の招待講演は私信に同封されていた原稿によるものである．

（はやかわ・ひろのぶ，元福井県庁職員）

特集／シュレーディンガー

思索へと誘うシュレーディンガーの著作たち



細谷　暁夫

早川博信氏が，「どこからどこへ」の中で，彼の墓碑銘についてお書きになっています．その難解とも言える言葉は読む人の自然あるいは人生の理解の程度によって意味合いが違ってくるように思います．多くの物理学者はその上方に掲げられている（52 ページの写真参照）シュレーディンガー方程式にある波動関数の解釈と重ね合わせるかもしれませんが，それはあながち的外れと言えないかもしれません．というのは，シュレーディンガーは物理学，生物学，心理学，哲学と広汎なテーマについて，若い頃から晩年まで一貫して「個と全体」についての思索を深めていったからです．このことを，彼が一般向けに書いた著作を紹介する形で述べてみたいと思います．

さて，墓碑銘で彼は何を言おうとしたのでしょうか？感覚とは別に存在はあり，かつあり続けるという，「存在」について語っていますが，私には宇宙と言う方がぴったりして，金子みすゞの詩と通じていると思います．

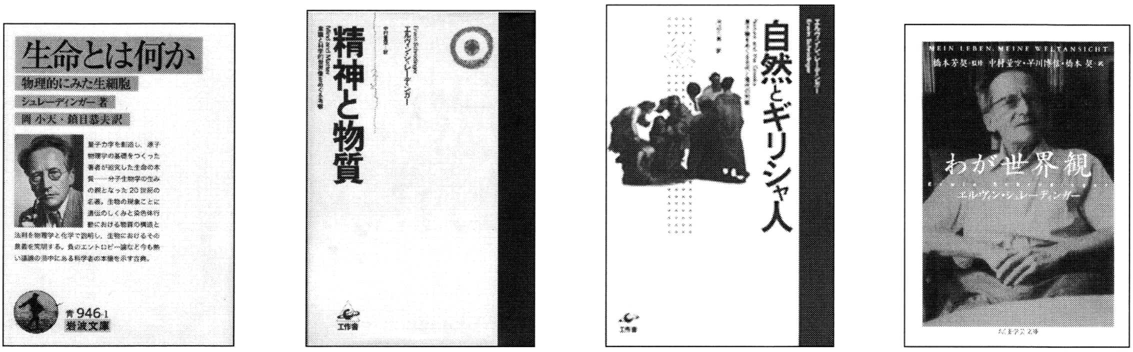
青いお空の底ふかく，
海の小石のそのように，
夜がくるまで沈んでる，
昼のお星は目にみえぬ．
見えぬけれどもあるんだよ，
見えぬものでもあるんだよ．

『わが世界観』の序文によれば，シュレーディンガーは若い時には詩人になることを夢見，終世詩作を続けていたそうです．詩については，ムーアによる伝記をご覧下さい．

『精神と物質』においては現代科学の分析性に限界を指摘して，現代科学の精密さと明晰を保持しつつ，全体としての意味を問うという，大問題に誠実に取り組んでいます．また本書では知覚についても，実験的事実なども紹介しながら多くの頁を割いています．シュレーディンガーは量子力学の研究以前に知覚，特に色覚についても研究していたことは有名ですが，晩年まで続いていたようです．現代の脳科学からみたらどういう評価になるのか，興味が湧きます．『わが世界観』においてはかなり踏み込んだ信念が書かれています．この哲学的な本が 1925 年ごろというシュレーディンガーの量子力学についての有名な論文と同時期であることには驚かされます．

『精神と物質』の前に出版された『自然とギリシャ人』では，科学の源流をギリシャのプラトン以前の哲学（タレス，デモクリトス，ヘラクレイトスたち）に求め，その長所と問題点をえぐろうとしています．本題の他にけっこう面白いエピソードも載せていて楽しめます．例えば，私が好きなエピキュロスは実は徹底した実証主義を取っていて，目に見える太陽の大きさが実際の大きさであり，遠方にあるから小さく見えているだけだと考えることを推測にすぎない，と排除しているそうなので，イメージが変わりました．

こうしたイオニア，ミレトス学派のあたりまでは，分析と同時に存在全体についても語っていたのですが，後世のヨーロッパ科学はそのうち分析性を強調していったのです．そして，全体性を回復するには東洋の血が輸血される必要があるのだろうと予想しています．すると，彼の墓碑銘にある Sein は東洋的な意味の普遍的な存在なのでしょう．『自然とギリシャ人』の訳者は註で，この思想はシュレーディンガーが若かったときに傾倒した，ショーペンハウエルの影響であると書い



シュレーディンガーの著作[1〜4].

ています．

この考えは，彼の著作の中で最も有名な『生命とは何か』の延長上にあると思います．生命を環境系から負のエントロピーを取り込む系として捉える現代の物理的生命観の基本的な思想をシュレーディンガーは述べています．最近，多くの人に読まれている福岡伸一氏の本『生物と無生物のあいだ』，『動的平衡』の肝心なところはシュレーディンガーにすでにあり，福岡さんの読みやすい日本語で多くの読者を得たと思います．生物の細胞を構成しているタンパク質は一定期間の間に総入れ替えになるそうです．生物は外界から食物としてタンパク質を取り入れ，消化してアミノ酸の形にバラバラに分解し吸収し，細胞でタンパク質として合成します．つまり，物質は流れ入りまた出ていくものでDNAにある情報だけがその生物のアイデンティティーを与えています．情報についても，外界から取り入れ処理をして，それに対して身体的に対応する中で，ニューラルネットワークの結合を変えていきます．そういう意味で，情報はニューラルネットワークのパターンという形で物質化されます．そのニューロンも構成物たるタンパク質は入れ替わって，DNA 情報だけが保持されているという，生物の中での物質と情報の興味深い2重輪環が見られます．

その方向で考えを進めていけば，人間が個として外界の中に置物のように存在するという西洋的な世界観は修正されて，むしろ環境の中にあって物質的，情報的に動的に平衡した部分系と見なす東洋の主客同一的世界観に近づくようにも思えます．

それにしても，シュレーディンガーの墓碑銘が，波動関数について述べているような気がしてならないのは私だけでしょうか？ 測定しようがしまいが波動関数は実在しているのだ，と述べていると思うのは物理屋の性でしょうか，それとも墓標の上方にあるシュレーディンガー方程式の印象からでしょうか．

シュレーディンガーは有名な猫の例えでコペンハーゲン解釈に疑問を呈した，と言われていますし，アインシュタイン，ポドルスキー，ローゼンの思考実験に関して，その非局所性こそ重要であると見抜いてエンタングルメントの言葉を作ったことになっています．しかし，そのことについては，前述のムーアの伝記には書かれていますが，彼自身が書いた一般向けの本の中ではほとんど何も述べていないようです．むしろ，『わが世界観』の中では意図的に触れないとすら述べています．語れないことについては，沈黙せよという同郷の哲学者ウィトゲンシュタインの箴言に従ったものでしょうか．『精神と物質』の中で，主観と客観の同一性のところで，量子力学の不確定性関係について婉曲に触れていますが，さしたる重要性を与えていません．この点については，最近の量子測定理論で理解が進みましたが，彼もハイゼンベルグの不確定性関係のオリジナルバージョンの中に概念的に不明確な点があることに気づいていたのかも知れません．またコペンハーゲン解釈についても触れていますが，「おそらく正しいのだろうが」と但し書きがついています．

シュレーディンガーは，「猫」でよく知られるように例示の達人で，例示に富む彼の著作は読者を思索に誘います．例えば，漫画などに人物の視線が描かれている場合，その点線の矢印は光子の運動方向とは反対に対象に向かっていることを彼は指摘しています．人は暗々裏に意図を持って測定するものであることを一般

の人たちも受け入れているからなのでしょう．

私は，ハイゼンベルグが1960年代に来日したときに，安田講堂での講演の冒頭で「物理学は本質的にギリシャ的なものであるのに，ギリシャ哲学の伝統を持たない日本人が理論物理学において優れた仕事をしている原因を知りたいと思って日本にやって来た」と言った言葉を思い出します．科学の源流がギリシャ哲学にあると，シュレーディンガーを含めヨーロッパの多くの知識人がそう考えているように思います．ただし，ハイゼンベルグはプラトン的な世界観に留まったようですが，シュレーディンガーはその限界を問題にしました．

不遜なようですが，ここであえて異論を唱えたいと思います．一神教以前，ヨーロッパ人が森の中で妖精やドワーフとともに過ごしていた時代について考えます．当然ながらギリシャ哲学も到達していなかった古代ヨーロッパにあって医療を担っていた魔術と鍛冶などの手工業の科学に対する役割はどうだったのでしょうか？ 山本義隆氏の『磁力と重力の発見』（全3巻）を読むとヨーロッパ科学の別の源流を魔術と金属加工に見て取ることもできます．それならば，日本人が科学することもまったく自然に理解できそうで，その中にシュレーディンガーが求めた現代科学と世界の全体理解への道が仄かに見える気がするのです．西洋と東洋の融合という，もともと西洋人の作り出した人工的な観念を結びつけるのではなく，それぞれの共通の歴史の中に次の展望を見る方が自然な気がします．対象が本質的に複雑な医学や生物学についてはもちろんですが，科学の中でもっとも分析的な物理学も量子力学にまで至れば，個と全体の不可分性があることは示唆的です（註：最後の点についてボームの教科書『量子論』の第8章に説明がありますが，最近の量子測定理論は個と全体の不可分性を数学的に首尾一貫して取り込んでいるように思います）．

その中で，シュレーディンガーの言うように現代科学の持つ明晰性は大事です．このギリシャ起源の明晰性はこれからの科学に残るはずです．あるべき世界観を細胞にたとえるならば，科学は外部からの侵入者でありながら活力源を担うミトコンドリアのようなものでしょうか．

参考文献

1) エルヴィン・シュレーディンガー著，岡小天，鎮目恭夫訳『生命とは何か』岩波文庫（2008）．
2) 同，中村量空訳『精神と物質』工作舎（1987）．
3) 同，河辺六男訳『自然とギリシャ人』工作舎（1991）．
4) 同，橋本芳契監修，中村量空，早川博信，橋本契訳『わが世界観』ちくま学芸文庫（2002）．
5) 『金子みすゞ童謡集』角川春樹事務所（1998）123頁．
6) 福岡伸一著『生物と無生物のあいだ』講談社現代新書（2007）．
7) 福岡伸一著『動的平衡』木楽舎（2009）．
8) 山本義隆著『磁力と重力の発見』（全3巻）みすず書房．
9) デヴィッド・ボーム著，高林武彦，河辺六男，後藤邦夫，井上健訳『量子論』みすず書房（1964）．
10) ウォルター・ムーア著，小林澈郎，土佐幸子訳『シュレーディンガー　その生涯と思想』培風館（1995）．

（ほそや・あきお，東京工業大学大学院理工学研究科）

特集／シュレーディンガー

シュレーディンガー方程式をどのように出してくるか

学部生向け教科書に見る日米物理教育の相違点



土佐　幸子

どの国で量子力学を学ぼうと，科学的な概念に違いはないはずである．しかし，教育というのは，人から人への伝達であり，様々な文化的影響を受けざるを得ない[1)]．一つの文化の中にいると，その文化特有の影響を感知できずにいることも多いだろう．無意識のうちに，自分が習ってきた方法が，万国共通の唯一の学習形態だと思ってしまうこともあるかもしれない．そこで，国際比較を試みよう．今回の特集に合わせ，シュレーディンガー方程式を大学生が学ぶに当たって，日本とアメリカで違いがあるのかを探りたい．方法として用いるのは，学部生向けの一般物理学，および量子力学の教科書の内容比較である．欧米の教科書 16 冊，日本の教科書 8 冊について，シュレーディンガー方程式を初めて出してくるところの記述の仕方がいかに違うかを調べた．

まず，アメリカの理工学部の学生が，初年度に受講する一般物理学の教科書を見てみよう[2〜5)]．一般物理学は，代数学を基礎とするコースと，微積分学を基礎とするコースに分かれている．2 期制の大学であれば，通常，前期に力学，波動，熱力学，後期に電磁気学，光学，量子論を学ぶ．教科書は 4〜5 cm も厚さのある大部である．シュレーディンガー方程式が初めて出てくる部分を見てみると，文章による記述が多い．代数学を基礎とするコースでは，微分方程式は使えないので，文章による記述に頼るのは当然である．しかし，微積分学を基礎とするコースの教科書でも，シュレーディンガー方程式を出してくる前に，その式が何をするものか，また，なぜそのような式が必要なのかを問い，その答えを説明している．古典力学におけるニュートンの運動方程式，あるいは電磁気学におけるマクスウェル方程式と同様に，自然界を記述する基本方程式であること，また，1926 年に発見されて以来，シュレーディンガー方程式がミクロの世界を記述するのに非常な成功を収めてきたことにも触れている．

次に，アメリカの物理学専門課程で使われる教科書を見ると[6〜17)]，シュレーディンガー方程式を出してくるに当たり，まず，物質波の運動を記述する式が満たすべき性質を要請してから，議論を展開しているものが 7 冊あった．もちろん，シュレーディンガー方程式は，厳密に導出できるものではなく，考察によって導かれた式が，観測結果をうまく説明できるかどうかで，その正しさが認められることに言及の上である．要請のおき方は様々である．例えば，Eisberg の本[11)]では，1 次元空間を運動する粒子について，

1. ド・ブロイ–アインシュタインの仮定と矛盾しないこと，
2. 非相対論的エネルギーの式と矛盾しないこと，

3. 波動関数 Ψ について線形の式であること，

4. ポテンシャル・エネルギー V が時間と場所によらない定数の場合，式は三角関数の波を解として持つこと

の4項目を要請している．すると，時間について1階微分，空間について2階微分の一般形が候補として上がり，係数を比較することによって，時間に依存するシュレーディンガー方程式が導かれる．この場合，好んで使われるのは plausibility という言葉である．日本語に直せば「もっともらしさ」となろうか．方程式を与えられたものと捉えるのではなく，なるべく納得のいく形で披露しようという，著者たちの姿勢がうかがわれる．要請をおくまではいかないが，「もっともらしさ」を説明している本が3冊ある一方，単に式を与えている本も2冊あった．

日本の教科書を見てみよう[18~25]．居住地の制限のため，入手できた本が限られていたことをあらかじめお断りしておきたい．比較を表に示す．

表1 日本と欧米の量子力学の教科書におけるシュレーディンガー方程式初出部分の記述比較（数字は調べた本の内，項目に該当する冊数のパーセンテージを示す．カッコ内は冊数）．

記述の仕方	日本	欧米
要請をおいて議論を展開	0%(0)	58%（7）
要請はおかず，計算を示す	75%(6)	25%（3）
式を与える	25%(2)	16%（2）

表1から明らかなのは，あらかじめ要請をおいて議論を展開するという方法をとっている日本の教科書が1冊もなかったことである．今回調べた欧米の教科書のうち，ランダウ，ディラック，シッフ，ボーム，およびメシアの5冊は，日本語版が長く読み継がれている．日本の学生が，要請をおいて議論する記述方法に無縁だったわけではない．翻訳書がその手法をとるなら，和書は別のアプローチをとってきたとも考えられる．しかし，「以下述べる説明も，方程式の形がもっともらしいと読者に感じてもらうための方便にすぎない[26]．」，あるいは「…もっともらしい形の式を出し，これが物質波の従うべき方程式なのではあるまいか，と想定しただけである[27]．」（下線は原著による）と2人の著者が述べているところをみると，要請をおいて「もっともらしい」議論を展開するというアプローチの仕方を敬遠する傾向があるように思われる．

理論物理学の概念を説明するには，いくつものルートがある．概念がいかに作られたかを歴史的に叙述するのも一つの方法である[28]．その概念を現代の目で焼き直し，初学者になるべくわかりやすいステップから解説するのも一つの方法である．その場合，歴史的に重要な要素に触れずにおくこともあるだろう．また，著者の目的によっても，記述の仕方は変わるだろう．シュレーディンガー方程式を使えるようにすることを目的とする本ならば，導出部分は最小限の記述に収めるかも知れない．だとすれば，導出部分はさらりと流し，問題を解くことを重視する日本の教科書のあり方は，すでに構築された概念が使えるようになることを学生に期待していると言えるだろう．対照的に，前もって「こうではなければならない」と要請をおき，議論を展開するタイプの欧米の教科書は，学生に概念が生み出されるところを学んでもらいたいと思っているのではないだろうか．

この違いは，シュレーディンガー方程式の記述にのみ見られるものではないだろう．中学校理科の授業においても，問題の意味をさして議論せず，すぐに生徒実験を始め，その結果を重視することの多い日本の授業と，問題に含まれる概念は高度でなくとも，その意味を議論することを重視するアメリカの授業の傾向[29]とも，つながるところがあるように思われる．もとをただせば，知識の作り手として主要な立場を担ってきた欧米社会と，輸入した知識を咀嚼し，よりよく磨くことに努力してきた社会の違いであろうか．

しかし，忘れてならないのは，教育は子どもの

学習に効果的であってこそ，初めて意味をなすものだということである．この春学期に一般物理学を教えた学生の一人が，学期末に私にこう進言した．「講義で式を導いてくれても，僕たちは何も理解できません．学期の後半は，式の使い方を教えてくれたので，とても助かりました.」と．確かに，式を何度も使うことによって，その式の意味する物理的概念が見えてくることも多いだろう．既習事項の理解が不十分な学生にとって，式の導出に伴う操作は飛躍が大きすぎるかもしれない．シュレーディンガー方程式も然りである．なるべくたくさんの学生に，式の意味することを理解してもらいたいと思うならば，式を与え，問題を解かせ，その意味を解説するのが効率的かもしれない．現に，アメリカでも学生のレベルに合わせて，式を与えるタイプの教科書と，導くタイプの教科書を使い分けているようである．大事なのは，複数の選択肢を用意し，学習者の状況に合わせて，最適と思われる教授法を選び，組み合わせていくことではなかろうか．

量子力学の世界は，私たちが日常生活で経験している古典力学の世界とは異質な世界である．しかし，今や，ナノテクノロジーがニュースをにぎわし，生物学や医学に携わる人も量子力学なしでは済まされなくなった時代である．現代の若者の理解を助けるように，教授法も進展していくべきであろう．このコラムが，そのニーズを多くの人に認識していただく助けになれば幸いである．

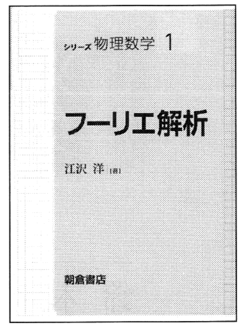
参考文献

1) J.W. Stigler, R. Gallimore, and J. Hiebert, "Using video surveys to compare classrooms and teaching across cultures: Examples and Lessons from the TIMSS Video Studies", *Educational Psychologist* **35**(2), (2000), 87–100.
2) D.C. Giancoli, "*Physics: Principles with Applications, 5^{th} Edition*", (Prentice Hall, 1998).
3) E.R. Jones and R.L. Childers, "*Contemporary College Physics 2^{nd} Edition*", (Addison-Wesley, 1993).
4) R.A. Serway and J.S. Faughn, "*College Physics 5^{th} Edition*", (Saunders College, 1999).
5) D. Halliday, R. Resnick, and K.S. Krane, "*Physics 5^{th} Edition*", (John Wiley & Sons, 2002).
6) E.E. Anderson, "*Modern Physics and Quantum Mechanics*", (Saunders, 1971).
7) C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, "*Quantum Mechanics*", (John Wiley & Sons, 1977).
8) R.W. Robinett, "*Quantum Mechanics—Classical Results, Modern Systems, and Visualized Examples*", (Oxford University, 1997).
9) D.J. Griffiths, "*Introduction to Quantum Mechanics 2^{nd} Edition*", (Pearson Prentice Hall, 2005).
10) A.P. French and E.F. Taylor, "*An Introduction to Quantum Physics—The MIT Introductory Physics Series*", (Stanley and Thornes, 1978).
11) R. Eisberg and R. Resnick, "*Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*", (John Wiley & Sons, 1974).
12) L.D. Landau and B.M. Lifshitz, " *Quantum Mechanics*", (Pergamon, 1974).
13) L.I. Schiff, "*Quantum Mechanics 3^{rd} Edition*", (McGraw-Hill, 1968).
14) D. Bohm, "*Quantum Theory*", (Prentice Hall, 1951).
15) A. Messiah, "*Quantum Mechanics Volume 1*", (translated from the French by G.M. Temmer) (North-Holland, 1958).
16) R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, "*The Feynman Lectures on Physics Quantum Mechanics*", (Addison-Wesley, 1965).
17) P.A.M. Dirac, "*The Principles of Quantum Mechanics*", (Oxford University, 1958).
18) 阿部龍蔵『はじめて学ぶ量子力学』（サイエンス社，2008）．
19) 仲滋文『新版シュレーディンガー方程式』（サイエンス社，2007）．
20) 清水明『新版量子論の基礎』（サイエンス社，2004）．
21) 岡崎誠『量子力学［新訂版］』（サイエンス社，1997）．
22) 小川哲生『量子力学講義』（サイエンス社，2006）．
23) 小出昭一郎『基礎物理学選書　量子論』(裳華房，1970)．
24) 小出昭一郎『基礎物理学選書　量子力学（I）』，（裳華房，1990）．
25) 中嶋貞雄『物理入門コース　量子力学—原子と量子』（岩波書店，1983）．
26) 文献 25)，pp.164.
27) 文献 24)，pp.15.
28) 朝永振一郎『量子力学 I，II』（みすず書房，1952）．
29) S. Tosa, "*Teaching Science as Inquiry in US and Japan: A Cross-Cultural Comparison of Science Teachers' Understanding of, and Attitudes toward Inquiry-Based Teaching*", Doctoral Dissertation, University of Massachusetts Lowell, 2009.

（とさ・さちこ，ライト州立大学理学部物理学科／教育学部）

フーリエ解析

江沢洋著，A5 判，344 頁，本体 4200 円，朝倉書店



本書は 1987 年に講談社から出版された「理工学者が書いた数学の本」シリーズの同じ題名の著書に加筆したものである．前シリーズの趣旨は，「物理学・工学のセンスで直観的な理解を大切にする」ことであったと著者自身が書いているが，「数学の本や論文は奇麗に正装した姿を机の上に出し，それを得るために腕まくりした姿を引出しに閉まってしまう」と著者が常々語っていたことを思い出す．本書はその引出しの中身を見せてくれる．従って，読者にも腕まくりを要求するが，読み切った後には，フーリエ解析と共にその数学に伴った“物理的センスと直観力”を会得させてくれる．

第 1 章ではフーリエ解析が概説される．有限区間内の有限個のじゅず玉（で作ったひも）の運動方程式をまず導出し，その区間内にじゅず玉がびっしり連続的に埋まるようにじゅず玉の個数を増やす極限を取り，波の運動（ひもの振動）を表す波動方程式という偏微分方程式が導出される．この波動方程式，さらに，熱の伝わり方を表す偏微分方程式である熱伝導方程式，これらの解の表現から派生し，関数のフーリエ級数による表現が紹介される．また，それらの表現を巡る偉大な先人たちの論争やエピソードも交えられているので，研究の中に人間味も感じられ楽しめる．

第 2 章では有限フーリエ級数を解説している．じゅず玉で輪を（周期的境界条件を）作り，じゅず玉の運動方程式を解いて行く．変数分離法を使い，未知の波数から決まる振動数に関する固有値問題に帰着させ，周期的境界条件から波数を決めると，2 つの任意定数を含んではいるが，あるモードに対する固有振動の解を得る．各モードの固有振動の解を重ね合わせて一般解の形に辿り着く．その上で，2 つの任意定数を初期条件から決める際のフーリエ係数と有限フーリエ級数の重要性が説明される．この数学的流れに対し，固有振動に対する物理的運動，さらには，有限個の固有振動の解が持つ（有限次元ヒルベルト空間における）完全正規直交性を解説し，フーリエ級数も固有振動の重ね合わせであるという物理的実体を直観させる．

第 3 章では，周期的境界条件の下，波動方程式の初期値問題を考えることで，（無限）フーリエ級数を解説する．波動方程式を導いた連続極限に合わせ第 2 章の解から波動方程式の解を作ることで，波動方程式に現れる波の速さは位相速度（固有振動の角振動数と波数の比）であることが分かり，この波数に依らない共通の位相速度を持つこと（従って波束が形を変えず伝播して行くこと）が解を作る際にうまく働く．第 2 章の類推から解を固有振動の重ね合わせで表現し求められることに気付く一方で，連続極限のため固有振動の個数は無限個となり無限次元ヒルベルト空間の完全正規直交性を知る必要がある．この完全性を説明するためにディラックのデルタ関数の重要性が解説され，完全正規直交系周辺の簡単なヒルベルト空間論の内容も説明されている．この章の後半では，波動方程式に関連し，依存領域，フーリエ展開の実数条件，エネルギー保存則などの周辺の物理が展開される．

第 4 章では，フーリエ係数とフーリエ級数の無限体積極限としてフーリエ変換とフーリエ逆変換が導入され，フーリエ解析が紹介される．従って，各波数におけるフーリエ変換を係数として，平面波からなる要素波を全ての波数で重ね合わせた（波数で積分した）ものがフーリエ逆変換である，といった物理的直観を得る．第 5 章でフーリエ変換の応用として，拡散方程式や熱伝導方程式の初期値問題など物理に係る数学の問題を色々と具体的に扱って見せる．第 6 章ではラプラス変換とその電気回路への応用なども扱われている．

著者は読者と共に，物理数学という森に通ったフーリエ解析という道を歩み，そこから派生する基礎的な物理数学の色々な樹木の生い茂った脇道を散策することで，読者に腕まくりをさせ心地良い汗をかかせる．特に第 5 章と第 6 章はその樹木の宝庫である．著者が「フーリエ解析は量子力学の原理に係る重要性がある」と書いているように，例えば，波動方程式とシュレディンガー方程式の波束の伝播の仕方の違いを，両者の分散関係（角振動数と波数の関係）を見比べることで分かる，などといった量子論の根底にある波動の様々な基礎的概念を，本書では，その物理的直観も学べるよう豊富な例題を用いて解説し，さらに奥深く延びている物理の道へと誘うための内容が色々と工夫されている．

廣川 真男（岡山大学大学院自然科学研究科）

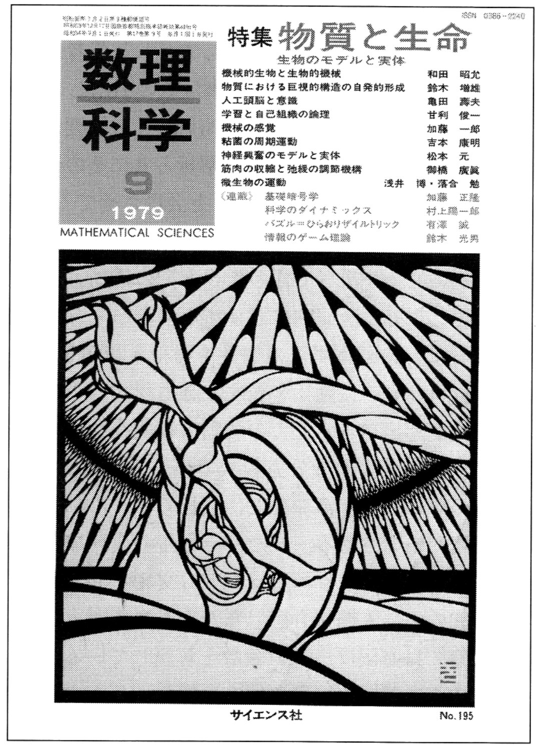
「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

鈴木 増雄

1979年9月号

先見の明のある和田昭允先生の企画による特集「物質と生命」は壮大なテーマであり，30年経った現在でも自然科学の極めて重要な研究対象となっている．この特集号で筆者が取り上げたのは，物質科学，特に統計物理学の立場からこれに迫る方法論とその拠り所となる基礎的な概念である．それを現在の言葉で一口に説明すると次のように言えるであろう．生命は非平衡開放系の秩序であり，より一般に，平衡・非平衡系の秩序は，初期にノイズによって駆動された小さな秩序の芽が「線形不安定性効果」によって指数関数的に成長し，それが充分な時間経過によって「非線形安定化効果」とバランスをとって生成される．この結果は筆者により1976年非線形ランジュバン方程式からノイズの強さ，非線形性及び時間に関する漸近評価によって得られたものであり，「秩序化のスケーリング理論」として，その後多くの問題に適用され，より複雑な場合に様々な形で拡張されている．秩序生成とは「対称性の破れ」が自発的に起ることである．これは本質的に，不安定性と非線形性がノイズによって絡み合った「相乗効果」として起る．もし，系が安定で線形の現象に限定すれば，アインシュタインのブラウン運動の理論から始まり久保の線形応答理論として一般論が確立されている．非線形非平衡系の一般論の構築は望み薄であるが，不安定系での秩序生成に限定すれば，上記の秩序化のスケーリング理論は，その複雑な一般的取り扱いに対する理想化され最も単純化されたプロトタイプと言える．実際この理論は1978年の第17回ソルベイ会議（その前年ノーベル化学賞受賞のプリゴジン主催）の招待講演となり多くの議論が行われた．その後も多くの国際会議でとり上げられた．例えば，これは，レーザー発振，超放射，プラズマのクランプス現象などに応用されている．川崎達によって自由度無限大の非一様な系にも拡張されている．また，宇宙初期のインフレーション機構（佐藤・グスによって提唱された宇宙の指数関数的膨張機構）もメカニズムとして



はこのカテゴリーに入ると言ってもよいであろう．生命との関連で言えば癌は非線形安定化効果が欠けた線形不安定性効果のみで指数関数的に成長し続ける現象である．それに対して，正常な細胞ではそれぞれ自分の固有な場に制御されながら成長するという非線形安定化効果が働いている．この他にも，分子モーターに対するファイマン・大沢のラチェットモデル，ジョセフソンの瞑想モデル，生体における確率共鳴などととり上げるべき例はきり無く多い．シュレージンガーが謎とした機械としての人間の自由意思もゆらぎが高度に（非線形的に）組織化されたものとして捉えることができるであろう．以上は「統合科学」の一つの視点となり得る．これからの発展が楽しみである．

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）

問題例で深める物理 Problem Answer Discussion 第8回

変分原理

香取 眞理・中野 徹

今回は物理における**変分原理**の有用性について述べる．光は所要時間が最短となる経路をとる（**フェルマーの定理**）．粒子に対しては作用が極小値をとるという原理が働く（**最小作用の原理**）．変分原理を通して粒子性と波動性の**二重性**を議論する．さらにファインマンに従って，作用が最小となる古典的な経路の周りにわずかに存在する経路の広がりを評価することによって，**シュレーディンガー方程式**を導く．

8.1 エネルギー最小の原理

量子力学では，エネルギー最小の要請を置くことにより，基底状態のエネルギーの値と波動関数を求めることができる．

問題 8.1 1 次元調和振動子において，基底状態の波動関数を $\psi(x,a)=C(a)\mathrm{e}^{-ax^2}$ とおく．ここで，a は正の未定定数である（$C(a)$ は波動関数の規格化条件から定まる a の関数）．エネルギーの期待値を a に関して最小にすることにより基底状態のエネルギーを求めなさい．

解答 規格化条件 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,a)|^2dx=1$ より，$C(a)>0$ とすると，$C(a)=(2a/\pi)^{1/4}$ と定まる．バネ定数 k のバネにつなげられた質量 m の振動子に対するハミルトニアンは

$$\mathcal{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}kx^2$$

である．この期待値を $E(a)$ と書くことにする：

$$\begin{aligned}E(a)&=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,a)\mathcal{H}\psi(x,a)dx}{\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,a)|^2dx}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,a)\mathcal{H}\psi(x,a)dx.\end{aligned}$$

この式に $\psi(x,a)=C(a)\mathrm{e}^{-ax^2}$ を代入すると

$$E(a)=\frac{a\hbar^2}{2m}+\frac{k}{8a}$$

を得る．$E(a)$ は $a=\sqrt{mk}/2\hbar=m\omega/2\hbar$ のとき最小値をとる（ω は角振動数 $\sqrt{k/m}$）．最小値は

$$E=E\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)=\frac{\hbar\omega}{2}\qquad(8.1)$$

であるが，これは基底エネルギーである． ■

波動関数は

$$\begin{aligned}\psi(x)&\equiv\psi\left(x,\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\\&=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)\end{aligned}$$

となる．これを時間に依存しないシュレーディンガー方程式 $\mathcal{H}\psi(x)=E\psi(x)$ に代入すると，固有エネルギーとして確かに (8.1) が得られる．

8.2 幾何光学におけるフェルマーの定理

幾何光学での光の伝播の仕方は**フェルマーの定理**で表現される：光は所要時間が最短になるような経路をとる．

> **問題 8.2** フェルマーの定理を用いて，幾何光学の反射の法則を導きなさい．

解答 図 8.1 のように点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ から出た光が鏡の上の点 $\mathrm{O}(a, 0)$ で反射されて，点 $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ へ到達するような状況を考える．ただし，反射する点 O の鏡の上の位置 a を未定のパラメータとする．点 P から点 O を経由して点 Q までにかかる時間を a の関数として $T(a)$ と記す．光速を c とすれば

$$T(a) = \frac{\sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - a)^2 + y_2^2}}{c}$$

である．$dT(a)/da = 0$ より

$$\frac{a - x_1}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2}} = \frac{x_2 - a}{\sqrt{(x_2 - a)^2 + y_2^2}}.$$

これから $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$ つまり $\theta_1 = \theta_2$ が導かれる．これは**反射の法則**として知られている関係式である． ■

問題 8.2 の解答では，伝播経路が 1 つの変数 a だけで指定できる場合を考えた．しかし，光の伝播速度が場所により異なる場合には，もっと一般的な取扱いが必要である．光の伝播速度 v は屈折率を n とすれば $v = c/n$ で与えられる．屈折率が場所の関数 $n(x, y)$ である場合には，光が (x, y) から $(x + dx, y + dy)$ へ行くのに要する時間は

$$dt = \frac{n(x, y)}{c}\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

である．よって，点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ から点 $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ に至る所要時間は，$y' = dy/dx$ として

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{n(x, y)}{c}\sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad (8.2)$$

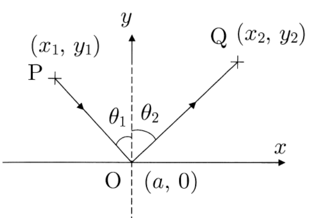


図 8.1 反射の法則．

という積分で与えられることになる．光はこれを最小にするような経路を選択する．このような場合には，反射の法則を導いたときのように簡単には経路を決めることができない．これに対処する方法が**変分法**である．

8.3 変分法

(8.2) の積分をより一般的な場合に拡張して議論しておくことにしよう．ただし，2 次元平面上での伝播に限定し，被積分関数は x と y と y' の関数 $F(x, y, y')$ で与えられるものとする：

$$J[\Gamma] = \int_\Gamma F(x, y, y')dx. \qquad (8.3)$$

Γ は (x_1, y_1) を出発し (x_2, y_2) に到達する経路を表す．J を最小にする Γ を求めたい．このような問題（**変分問題**という）の解法はオイラーにより与えられた．

J は経路 Γ が曲線 $y = y(x)$ で与えられたときに極値を持つとする．$\eta(x)$ を $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ であるような任意の連続関数とする．図 8.2 のように，経路 $y = y(x)$ を各 x（$x_1 \leq x \leq x_2$）で $\eta(x)$ の a 倍だけずらした経路を描き，この経路に沿った積分

$$J(a) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + a\eta, y' + a\eta')dx$$

を考える．$J(a)$ は $a = 0$ において極値をとるものとしたので，$J(a)$ の導関数は $a = 0$ で 0 であ

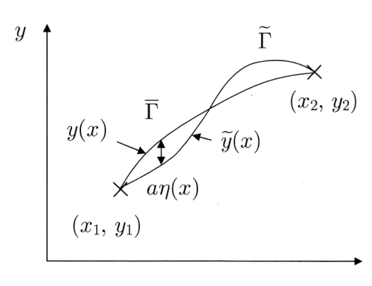


図 8.2 積分 $J[\Gamma]$ の値は，経路が $\overline{\Gamma} : y = y(x)$ のときに極小あるいは極大となる．これからずれた経路 $\widetilde{\Gamma} : \widetilde{y} = y + a\eta(x)$ を考える．

る：F の y と y' による偏微分をそれぞれ $F_y, F_{y'}$ と表すことにすると

$$\left.\frac{dJ(a)}{da}\right|_{a=0} = \int_{x_1}^{x_2} [F_y \eta(x) + F_{y'} \eta'(x)] dx = 0.$$

積分の第 2 項で部分積分を行うと，積分区間の両端で η は 0 であるとしたので

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right] \eta(x) dx = 0.$$

任意の連続関数 $\eta(x)$ に対してこの式が成り立つための必要十分条件は

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \tag{8.4}$$

である．これを**オイラーの条件**あるいは**オイラー・ラグランジュの方程式**と言う．

(8.4) 式は F の形により種々のケースに特化される．F が y を含まない場合は $F_{y'} =$ 一定，F が y' を含まない場合は $F_y = 0$ である．また，F が x を陽に含まない場合は，

$$F - y' F_{y'} = \text{一定} \tag{8.5}$$

である．なぜなら

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) \\ &= F_y y' + F_{y'} y'' - y'' F_{y'} - y'^2 F_{y'y} - y' y'' F_{y'y'} \\ &= (F_y - y' F_{yy'} - y'' F_{y'y'}) y' \\ &= \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) y' = 0 \end{aligned}$$

だからである．場合に応じて使い分けるのが望ましい．

図 8.1 と同様に，水平方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸をとる．光の経路上の各点 (x, y) での入射角（光の進路と鉛直上向きの直線とのなす角）を $\theta(x, y)$ と書くことにする．

問題 8.3　屈折率 n が高度 y にだけ依存する媒質中を光が伝播するものとする．このとき，$n \sin\theta =$ 一定 という条件を満たすことを示しなさい．

解答　与条件より $n = n(y)$ なので，(8.2) の積分の被積分関数は $F(y, y') = (n(y)/c)\sqrt{1 + (y')^2}$ となる．これは x を陽には含まないので，オイラー・ラグランジュの方程式の (8.5) のバージョンを使うのが便利である．すると，$c =$ 一定 なので

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{一定}$$

が得られる．ところが，

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \sin\theta(x, y)$$

であるので，

$$n(y) \sin\theta(x, y) = \text{一定} \tag{8.6}$$

が結論される．■

(8.6) の応用を考えよう．屈折率が n_1 の媒質から屈折率が n_2 の媒質へ入射する場合，入射角を θ_1，屈折角を θ_2 とすれば，(8.6) より

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

となる．これを**スネルの法則**という．

蜃気楼は屈折率が高度により変化するために現れる現象である．何種類かのタイプがある．富山湾での春の蜃気楼は，立山からの雪解け水が富山湾に流れ込み海面の方が大気より温度が低く，そのため屈折率が高度と共に減少するのが原因である．

問題 8.4　屈折率が高度と共に減少する場合，海面上にある遠くの物体を，同じく海面の高さから眺めると，どのように見えるか．

解答　(8.6) の関係式によれば，入射角 θ は上空に行くほど大きくなり，ついにはある高度で $\theta = \pi/2$ になる．それより先は，光の経路は図 8.3 のように下方に戻ってくることになる．したがって点 Q から見ると，点 P にある物体から発せられた光は

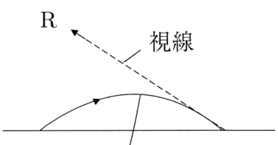


図 8.3　点 P にある物体を点 Q から見る．

あたかも上空の点 R の方向からやってくるように見える．つまり，遠くの物体が浮き上がって見えることになる． ■

8.4 光の波動性

なぜ光は所要時間最小の経路をとるのであろうか．光はとても賢くて，経路ごとの所要時間を瞬時に計算して，そのうちの最小の経路を選ぶことができるのであろうか．事実はその逆である．光は愚かにも，めったやたらにいろいろな経路をとるのである．結果的に最小経路が生き残るだけなのである*1)．

光には波動性もあるということを思い出して，先の反射の問題をもう一度検討してみることにする．図 8.4 のように点 P から放出された光の波が，点 O だけではなく，反射面の広い領域で反射されて点 Q に到達するものとしよう．

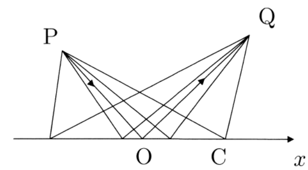


図 8.4　いろいろな経路をとる反射光．

問題 8.5　点 P で角振動数 ω の光の波が放出され，それが図 8.4 のように反射面のいろいろな点で反射されるものとする．時刻 t に点 Q で観測される波はどのように表されるであろうか．

解答　点 P で放出された光の波が点 C を経由して点 Q に到着する場合，点 P から点 Q への所要時間を t_C と書くことにする．時刻 t で点 Q に到達した光の波が点 C を経由して来たものであるとすると，その波は波源 P では $A\mathrm{e}^{i\omega(t-t_\mathrm{C})}$ のように振動していたことになる．いろいろな反射点 $\{\mathrm{C}\}$ を経由するので，時刻 t に点 Q で観測される波は経路 $\{\Gamma\}$ に渡って重ね合わせたものになる：

$$\sum_{\{\Gamma\}} A\mathrm{e}^{i\omega(t-t_\mathrm{C})} = A\mathrm{e}^{i\omega t}\sum_{\{\Gamma\}} \mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{C}}. \quad (8.7)$$

（厳密に言うと振幅 A は経路に依るが，簡単のために一定とした．） ■

(8.7) の経路による因子 $I = \sum_{\{\Gamma\}} \mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{C}}$ を考えよう．経路が異なると t_C が異なる．よって，$\{\Gamma\}$ について和をとると，$\mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{C}}$ の実部も虚部もプラスのものとマイナスのものとを足し合わせることになるので，キャンセルしてしまうように思える．しかし完全に零になるわけではない．点 C の座標を x とし，$t_\mathrm{C} = t(x)$ と記す．$t(x)$ は点 O $(a, 0)$ で極小値 t_O をとるから，$x = a$ の周りでテイラー展開すると，$t(x) = t_\mathrm{O} + B(x-a)^2 + \cdots$ となる．この 2 次まで考えると

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{C}} &= \mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{O}}\mathrm{e}^{-i\omega(t_\mathrm{C}-t_\mathrm{O})} \\ &\fallingdotseq \mathrm{e}^{-i\omega t_\mathrm{O}}\mathrm{e}^{-iB\omega(x-a)^2} \end{aligned}$$

となる．$\{\Gamma\}$ に渡って，すなわち x に渡って足し合わせると，$x = a$ の近傍では $B\omega(x-a)^2$ が小さいので，大きな寄与をする．したがって点 Q で観測される波は

$$A\mathrm{e}^{i\omega(t-t_\mathrm{O})}\int \mathrm{e}^{-iB\omega(x-a)^2}dx \propto A\mathrm{e}^{i\omega(t-t_\mathrm{O})}$$

となり，極小値の点 O の近傍で反射されたものだけが残ることになる．これがフェルマーの定理の心である．

8.5 最小作用の原理

通常は古典力学で記述される粒子も，光のように粒子性と波動性の**二重性**を持っていると考えてみよう．このとき，フェルマーの定理に相当するのが古典力学ということになる．そして古典的な軌道の周りの「揺らぎ」の様子を記述するのが量子力学なのである．

粒子の場合は，光の所要時間に対応する量は**作用**と呼ばれる．質量 m の粒子が，ポテンシャル $V(x)$ の中を時刻 t_1 から t_2 の間に x_1 から x_2 へ

*1)　ダーウィンの進化論では，最適なものが最初から決まっているわけでなく，多数の死屍累々の犠牲の上で，結果的に最適なものが生き残るのであると主張する．これとよく似ている．

運動するとしたとき，作用 S は

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\dot{x}, x)dt \qquad (8.8)$$

で与えられる．ただしここで，

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x). \qquad (8.9)$$

である（ラグランジアン）．作用 S を極小にする経路を決定するのがニュートンの運動方程式である．

問題 8.6　(8.8) が極値をとる経路はニュートンの運動方程式の解であることを示しなさい．

解答　(8.9) を (8.8) に代入して，オイラー・ラグランジュの方程式 (8.4) の (x, y) を (t, x) と読み替えて適用する．すると，$\mathcal{L}_x = -\partial V/\partial x, \mathcal{L}_{\dot{x}} = m\dot{x}$ であるから $m\ddot{x} = -\partial V/\partial x$ という微分方程式が得られる．これはニュートンの運動方程式 $F = ma$ に他ならない．■

8.6 経路積分とシュレーディンガー方程式

電子もまた，光と同様に粒子性と波動性の両方を兼ね添えている[1]．電子の運動を記述するのにファインマンは**経路積分**を考えた[2]．電子の状態は波動関数 ψ で表される．電子が一つの時空点（A で表す）から別の時空点（B で表す）へ伝播するとしよう．出発点での波動関数 ψ_A が与えられると，それはいろいろな経路 $\{\Gamma\}$ を通って伝わり，それらの重ね合わせとして B での波動関数 ψ_B が決まる．各々の経路 Γ に対しては，(8.8) によって作用 $S(\Gamma)$ が決まり，ψ_A から ψ_B に次式のように伝えられる：

$$\psi_B = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\Gamma)\right)\psi_A. \qquad (8.10)$$

いろいろな経路について重ね合わせると

$$\psi_B = K(B; A)\psi_A \qquad (8.11)$$

となる．ここで

$$K(B; A) = \sum_{\{\Gamma\}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\Gamma)\right) \qquad (8.12)$$

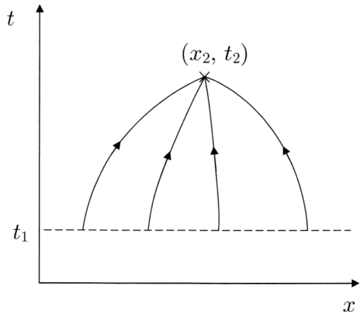


図 8.5　波動関数 $\psi(x_2, t_2)$ は時刻 t_1 での波動関数 $\psi(x_1, t_1)$ の重ね合わせで決まる．

である．

図 8.5 のように，時刻 t_2 における点 x_2 での波動関数の値は，過去のある時刻 t_1 における各点での波動関数からの寄与の重ね合わせで与えられる：

$$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2, t_2; x_1, t_1)\psi(x_1, t_1)dx_1.$$

ここで $K(x_2, t_2; x_1, t_1)$ は (x_1, t_1) から (x_2, t_2) へ至るすべての経路に対する遷移確率振幅であり，(8.12) により与えられる．ファインマンはこれを**プロパゲーター**（伝播子）と呼んだ．彼はこの経路積分の表式からシュレーディンガー方程式を導いた．

問題 8.7　$t_2 - t_1 = \varepsilon$ とする．ラグランジアン (8.9) において微分を差分で置き換えることにより，作用 S に対して，$\varepsilon \ll 1$ のときに有効な近似式を求めなさい．

解答　$t_1 = t$ とし，また $x_2 = x, x_1 = y$ と書くことにする．速度 $\dot{x}$ を差分 $(x - y)/\varepsilon$ で近似する．また，ポテンシャルを平均値 $(x + y)/2$ での値にしておく：

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\frac{(x-y)^2}{\varepsilon^2} - V\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

t_1 から t_2 への経路の作用 S はこれに微小時間 ε を掛ければよい：

$$S = \frac{m(x-y)^2}{2\varepsilon} - \varepsilon V\left(\frac{x+y}{2}\right). \qquad ■$$

上で求めた S を (8.12) に代入すれば，(8.11)

より

$$\psi(x,t+\varepsilon) = \sum_{\{y\}} \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\frac{m(x-y)^2}{\varepsilon}\right] \times \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]\psi(y,t).$$

$\sum_{\{y\}}$ を y の積分で置き換える．規格化因子を C として $\sum_{\{y\}} \to C\int dy$ とすると

$$\psi(x,t+\varepsilon) = C\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\frac{m(x-y)^2}{\varepsilon}\right] \times \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]\psi(y,t)\,dy.$$

$y = x + \varepsilon^{1/2}z$ とおき，積分変数を y から，z に変更する：

$$\psi(x,t+\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}C\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{imz^2}{2\hbar} -\frac{i\varepsilon}{\hbar}V\left(x+\frac{\varepsilon^{1/2}z}{2}\right)\right]\psi(x+\varepsilon^{1/2}z,t)\,dz. \tag{8.13}$$

> **問題 8.8**　(8.13) において，$\varepsilon^{1/2}$ の冪でテイラー展開して，ε の 1 次まで残すことにより，シュレーディンガー方程式を導きなさい．

解答　(8.13) の各項を ε についてテイラー展開する．おのおの ε の 1 次まで考慮すると次のようになる：

$$\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V\left(x+\frac{\varepsilon^{1/2}z}{2}\right)\right] = 1-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x,t),$$

$$\psi(x,t+\varepsilon) = \psi(x,t) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t),$$

$$\psi(x+\varepsilon^{1/2}z,t) = \psi(x,t) + \varepsilon^{1/2}z\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) + \frac{1}{2}\varepsilon z^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t).$$

これらを (8.13) に代入して，ε の 1 次まで残せば，

$$\psi(x,t) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \varepsilon^{1/2}C\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{imz^2}{2\hbar}\right)\Big[\psi(x,t) + \varepsilon^{1/2}z\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) + \frac{1}{2}\varepsilon z^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) - \frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x)\psi(x,t)\Big]\,dz$$

左辺と右辺の第 1 項どうしが等しいとする．この要請から規格化定数 C が決まる：

$$\frac{1}{C} = \varepsilon^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{imz^2}{2\hbar}\right)dz = \left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2}.$$

次に

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2\exp\left(\frac{imz^2}{2\hbar}\right)dz \equiv \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} z^2\exp\left(\frac{imz^2}{2\hbar}\right)dz$$

において部分積分することにより，

$$\frac{\varepsilon^{3/2}}{2}C\int_{-\infty}^{\infty} z^2\exp\left(\frac{imz^2}{2\hbar}\right)dz = \frac{i\hbar\varepsilon}{2m}$$

を得る．整理すれば，シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\psi(x,t)$$

が得られる．■

参考文献

1) 外村彰：「目で見て学ぶ量子力学」，数理科学 2008 年 4 月号より連載．
2) ファインマン，ヒッブス著，北原和夫訳：『量子力学と経路積分』，みすず書房，1995．

（かとり・まこと，中央大学理工学部）
（なかの・とおる，中央大学理工学部）



野蛮人が物理学者になるの記

清 水　明

私のような者がこのコーナーに登場するのは気が引けるが，大企業でない会社に勤めた後で，大学で純粋物理をやるようになった人はそんなに多くはないので，読者の参考になる部分もあるかと思い，お引き受けした．

また，物理学者の友人たちを見ると，自分が研究したいことを，大学の初年時から決めていた人もいるし，遅い人でも，大学院の頃には決めて，基本的にはその延長線上の研究をライフワークにしている人が多い．しかし私は，自分が興味を持てることが何なのか，自分でもなかなかわからなかった．その点でも私は少数派なので，若い読者の参考（反面教師と言うべきか？）になることがあるかもしれない．

1. 工作が大好きでした

小学校の頃，私は動くプラモデルを作るのが大好きだった．今は，プラモデルというと，観賞用が主流になってしまって私にはつまらないのだが，当時は，様々な動きを実現する巧妙な仕組みのプラモデルがたくさんあり，私はそれらに夢中になった．中でも，今井科学のロボットプラモデル「ビッグサンダー」が最高傑作だったと思う．誰か復刻してくれないだろうか…．

プラモデルが完成すると，遊び倒すので１週間ぐらいで壊れてしまうのだが，捨てるときは，ギアボックスなどの部品を抜き取ってしまっておいた．だから，押し入れの中には，そういう部品の在庫（？）がいつも大量にあった．私はときどき，それらのガラクタを組み合わせて，様々な機械を作って遊んだ．例えば，自分の部屋のカーテンを電動にしたり，階段沿いに小さなケーブルカーのような運搬機を敷設してお菓子などが運べるようにしたり，という具合だった．厚手の画用紙とかバルサ材とか滑車を買ってきていろんなものを創作して遊ぶこともよくやった．

電気回路にも興味を持ち，「エレキット」という名の，様々な電子回路を組める玩具で遊んだ．これは，電子部品が板の上に配置してあり，自由に配線が変えられるという玩具で，後に復刻された「電子ブロック」よりも，私はこちらのほうが優れていたと思う．電子ブロックでは，配線だけでなく，それをブロックとして組み上げることにも注意を払わねばならないのに対し，エレキットはバネにコードを挟むだけで任意の配線が可能になっていたからだ．エレキットも，是非とも復刻してほしい商品の一つである．

中学生の頃は，友人たちと（ときには一人で）ロケット遊びもした．市販のロケット花火を大小様々買ってきて，それらを適当に加工して組み合

わせて多段ロケットに仕立て上げ，打ち上げるのである．ロケットの最終段には，虫や小さな蛙を「宇宙飛行士」として搭乗させたりした（虫や蛙さん，ごめんなさい）．2段ロケットぐらいまではわりとうまく行くのだが，3段ロケットになると，ときどき最終段が真下に向かって発射されるなど，今思えばかなり危険な遊びだった．そもそも花火を加工するなど言語道断，大変危険なので，読者は決して真似をしないでいただきたい．

しかし，これは本当にワクワクする遊びだった．それなのに読者に勧めるわけにはいかないのが，辛いところである．こういうことをやってしまうのが，まさに科学者の卵なのではないかと思う．それを社会的（？）制約から禁止せざるを得ないご時世では，科学者の卵はなかなか育たない．

他にも，友人たちと，フォークギターで弾き語りをしたり，サッカーをしたり，見よう見まねで器械体操をしたりと，遊びのネタには事欠かなかった．ただ，誰も指導者がいないところで鉄棒の大車輪をやったりしていたので，ある日手が滑って，（安全のために設けられた）砂場の外まですっとんでいき，固い地面に背中を強打した．落ちる角度が少し違っていたら，今頃こんな文章を書いてはいられなかっただろう．だから，読者は決して真似をしないでいただきたい（と書かざるを得ないのが辛いところである）．

2. 野蛮人と文化人

子供の頃に玩具を自作して遊んだか，本を読んで過ごしたかで，科学者になってからの基本的な考え方まで大きく変わるように思う．ここでは，前者を「野蛮人」と呼び，後者を「文化人」と呼ぼう．筆者は，野蛮人の物理学者である．

野蛮人と文化人とで，物理の見方がどう違うか？例えば，生物物理でよく耳にする「生物は機械のように堅い仕組みで動くのか？」という論争は，野蛮人には無意味に思える（生物物理の先生方，ごめんなさい）．私が自作した玩具もロケットも，そこら中がゆるゆるの，いい加減なものである．それでもほぼ期待通りに動く．どの程度の「ゆるゆる」まで許されるかは，動きに要求される精度で決まるのであり，機械ならば最低でもこれくらい堅いなどという普遍的な堅さがあるわけではない．また，たとえ精密な工業製品でも，機械にはいわゆる「あそび」が必須である．機械が堅いモノだというのは，本の中にしかない幻想なのだ．

そういうことは，野蛮人には当り前すぎて，文化人が何を問題にしているのか理解しがたい．小学校や中学校のとき，理科のテストで，電池や電球やモーターが登場する問題があると，プラモデルの残骸で動く玩具を作って遊んでいた私には，問題文を読むのと並行して答えがわかってしまうので，むしろ何を問われているのか理解できなかった．そのときと似た感触を覚える．

3. 田舎の学校

上記のようなことにばかり興味があったので，小学校のときは，宿題すら全くやらないような子供だった．忘れ物も多かった．教科書もよくなくした．他にもそういう子供がたくさんいたので，通知表はごく普通の成績だったように思う．ただ，中学生になったらなぜか，授業はちゃんと聴こうと決意した．田舎（長野県長野市の端）のことなので，授業をまじめに聴いている学生なんて多くはなかったから，それだけでも成績が上位になった．それで，田舎では進学校とされている高校に合格できた．なお，中学生のときに興味を持った，定番の（？）相対論ネタは，別所[*1)] に書いた．

高校では，宿題の量が多すぎたので，講義だけ聴いて乗り切ろうとした．しかしそれは通用せず，1年生の終わり頃にはビリに近いところまで成績が落ちた．そこで，2年生からは，人並みに参考書などを買い勉強するようになった．といっても，放課後のクラブ活動（空手部）が終わって，さらに1時間かけて電車で帰宅してから勉強するわけだから，たかが知れている（睡眠はしっかり8時間とった）．それでも田舎では十分で，成績が上位になった．それで，小学生の頃から科学や科学者

*1） 清水明，科学 **75** (2005) No.3, 334.

に興味があった私は，東京大学に進学することにした．

だから，3 年生になったら，生まれて初めて受験勉強をした．夏休みには，東京の大手予備校の夏期講習も受講した（でも，なぜか，総武線沿いの駅前でパチンコをしていた記憶もある…父上母上ごめんなさい）．なお，東京の人たちには，「なんで真夏に信州からこのくそ暑い東京に出てくるんだ？」と笑われたが，実は真夏の善光寺平は江戸よりも最高気温が高く，それゆえに美味しい桃が採れるのである．

過去の入試問題を解いてみると，京都大学の入試の数学の問題が，力ずくで解くようなものでなくアイデア次第で簡単かつ綺麗に解けるようになっているのが気に入って，「自分は京大向きなのでは？」と思いはじめ，一度は京都大学に行こうと決心した．ところが，仲の良い友人が東大のほうが良いと固く信じていて，さかんに東大を薦めてきた．田舎者ゆえに，私はそれを鵜呑みにして東大に進学したのだった．いい加減なものである．もちろん，自分にとって京大に行ったほうがよかったのかどうかは永遠の謎であるが，次節に述べるようなことを考えると，そのほうがよかったかもしれないと思うこともある．

なお，心配したとおり，入試の数学では，変な立体の体積を力ずくで計算するという，京大ではあり得ない問題が出て，数学の結果は綺麗な数になるはずだと信じていた私は，その問題が解けなかったことを告白しておく（正解は汚らしい数だった．そんなもん解けるか！）．

4. 物理学科へ

東京大学の学生は，学部の前半（1・2 年生の間）は駒場の教養学部に所属し，2 年生の秋頃に，どの学科に「進学」するかを決めるようになっている．私はその 2 年生の秋に，どこに進学するか，大いに迷った．物理学だけでなく，応用物理学も，電子工学も，ロケット工学も興味があったからだ．たしか，物理学科ではない学科を書いた志望届を提出しようと教務課に向かう途中で級友に会い，「え！ 嘘だろ，おまえは物理学科だろ？」と言われ（当時は物理学科の人気が高かった），やっぱり自分は物理学科なのかなと思い直して物理学科に進学したのだった．いい加減なものである．

物理学科の講義は，はっきり言って期待はずれだった．講義の準備をほとんどしてこない先生も少なくなかったし，講義内容そのものも，上質なものは数えるほどしかなかったからだ．それに何よりも，私が一番好きなのは，基礎的・原理的な問題である（と後年わかった）のに，当時の東大理学部物理学科は，そういう研究はしてはいけないし，考えてもいけない，という雰囲気が満ちあふれていたからだ．

例えば，量子測定理論やベルの不等式について全く無知な「偉い先生」が，そういうものがいかにくだらないかを講義で力説していた．何も知らないのに批判するというのは，今思えばお粗末きわまりないことなのだが，学生時代は影響されてしまった．統計力学の基礎的問題も考えてはいけないと，別の偉い先生が講義で言っていた．また，今の学生さんには信じられないと思うが，量子論を重力を含むように拡張する研究も，当時の東大理学部物理学科では誰もやってはおらず，御法度ようなものだったのだ．

このように，雰囲気や講義には失望したのだが，嬉しかったのは，級友たちがすこぶる優秀だったことである．級友たちから学んだことは実に多かった．

そんなわけで，自分が興味を持てる研究分野を見つけることができないまま，私は 4 年生になった．愚かにも，東大物理学科だけを見て，物理とはこんなものだと思ってしまったのである（馬鹿でごめんなさい）．就職活動もしたが，ある電機系の超大企業を友人と訪問したら，人事部の人に「物理の学部卒なんて，たとえ応用物理でもいらない」と言われる有様だった．ショックだった．

それで（デモシカですみません），修士課程ぐらいは出ないといけないと思い，大学院に進学した．もとより，やりたいことが決まっているわけでもなかったので，固体物理の講義で，私の質問をとても喜んで下さった，植村泰忠先生の，物性理論

の研究室に行くことにした．

ちなみに，その質問のやりとりというのは，熱伝導のところで，「先生の説明だと，熱が流れたら電流も流れてしまいませんか？」と私が訝しんで質問したら「それこそゼーベック効果です」と，とても嬉しそうに答えてくださったのだ．後で，非平衡統計力学を学んだときに，このように異なる種類の非平衡流が「クロスする」ことが一般に起こることを不思議なことだと習ったが，野蛮人には，上記のように直ちに直感できる自明なことに感じられた*2)．

植村研究室を選んだのは，上述の質問のやりとりだけではなく，修士課程を出て就職するつもりだったので物性にした，という面もあった（植村先生，申し訳ありません）．しかしながら，修士2年生のときに，就職しようとしたら，植村先生が「清水さんは博士課程に進んだほうがいいですよ」と強く仰り，それで翻意して博士課程に進学した（またまたいい加減ですみません）．

植村先生は，まさしく本物の学者で，とても尊敬できる方だった．一緒に研究室活動をしていた上村洸先生を初め，植村・上村研究室のメンバーも皆紳士的な方々で，その点ではとてもよかったと思っている．

しかしながら，もともと当時の東大物理学科の研究の中に自分の興味がある分野を見出せなかった私にとっては，研究に身が入らない状況が続いた．それでも，層状物質の超伝導やランダム系を研究した．そして，博士論文のテーマとして，当時の自分が想定し得る範囲内では一番面白いと思った，今風に言えば強相関3次元ランダム系（当時は，そんなもの全く流行ってはいなかったが）を実空間繰り込みで調べるというテーマをひねり出し，何とか博士号を取得できた．幸いこの仕事は，当時の指導教官の上村先生（植村先生は私がD1のときに定年退官された）も，当時助手だった青木秀夫さんも，植村先生も褒めてくださり，一応，物理の大学院を出ただけのことはしたと，一安心した．こうして，学部と合わせて9年間も過ごした東京大学と，いったんお別れした．

*2) 大学院生以上への注：相反定理には (a) 異なる成分が**クロスする**，(b) 輸送係数の異なる成分の**値が一致する**，という2つの側面がある．後者は，異なる種類の非平衡流を考えるまでもなく，一つの非平衡流の輸送係数の異なるテンソル成分についても不思議なことである．一方 (a) は，上述のように，さほど不思議ではないのだ．

5. 民間企業へ

物理の研究に対する情熱を十分にはもつに至らなかった私は，D3の初夏ぐらいまでには，キヤノン（株）への就職を決めていた．純粋物理ではないが，私が興味が持てるような何か基礎的な研究ができるのではないかと期待してのことだ．

実を言うと，上村先生は，大企業の基礎研究所への就職を勧めてくださっていた．伝統ある大企業で物性理論の研究を続けられるという，破格のお話だった．かたやキヤノンはというと，今でこそ日本を代表する大企業になったが，当時は，年間売上高が5千億円程度の中堅企業に過ぎなかった（ちなみに，昨年の売上高は4兆円に達する）．だから「目指せ一兆円企業」という目標が掲げられていたが，社員の多くは懐疑的だった．私が配属された中央研究所も，事務関係の人を合わせても300人程度という，こじんまりとしたものだった．博士号を持っている人も少なかった．

それなのに，なぜキヤノンを選んだか？ その理由は3つある．1つは，キヤノンは規模が小さいにも関わらず，米国特許の取得件数で1～3位（年によって変動）にランクされていたこと．しかも，特許料の収支が黒字（特許を買うよりも売るほうが多い）というのも，当時の日本の有名大企業ではあり得ないことだった（今は，どうなんだろう？）．2つ目は，成長が止まった老木（＝伝統ある大企業）を維持するよりも，若木を育てる仕事のほうがやりがいがあると思ったこと．3つ目は，不遜な言い方だが，大企業には研究の知識も経験もある管理職がたくさんいて，私の研究をコントロールしようとするのではないかと怖れたこと．キヤノンであれば，製品開発のエキスパートはいても，研究に関しては知識も経験も浅い管理職しかいないはずだから，そういう心配はないだろう．これ



筆者が入社した年の，キヤノン中央研究所の納涼祭のひとこま．漏斗を使ってビールの早のみ競争をしている（よい子は真似をしないように）．前列左端が筆者．この頃は，大企業でなかったためか，若い社員が好き放題にやっていて，楽しい会社だった．

らの 3 点は，自分のアイデアを大切にしたい私には大きなポイントだったのだ．

私がそのように短絡的に考えているのをご覧になって，上村先生はとても心配してくださった．それでなんと，とてもお忙しいのに，わざわざキヤノン中央研究所まで出向いてくださり，所長（後に社長になったあと急逝された御手洗肇氏）と，私が所属する予定の部の部長に面談をしてくださった．それで，面談が終わった帰り道に，私に「あの所長さんなら大丈夫だ」と言ってくださった．上村先生は，そういう暖かいお人柄の，頼りがいのある方である．私がキヤノンに入社してまもなく，ある大学の助手に誘っていただいて迷いが生じたとき，上村先生にご相談したら「ここではこういう仕事をしましたと胸を張れる仕事を成し遂げるまでは，勤め先は変わってはいけない」と仰り，目が覚めたこともある．このお言葉は，研究者を目指すすべての若者に，上村先生にかわって贈りたい．

入社してみると，（今はどうか知らないが）キヤノンは楽しい会社だった．もちろん，どんな組織でも嫌な面は少なからずあるのだが，私が嬉しかったのは，（今はどうか知らないが）明るく前向きな雰囲気である．「明るい」というのは，納涼祭の写真を見ていただけば一目瞭然だろう．

「前向き」というのは，例えば研究テーマが採択されるかどうかの判断材料は，本人がどれくらい熱心かが大きなウェイトを占めていたのだ．これは技術的な判断ができる上司が少なかったということもある．しかし，もしも知識と経験がある上司たちがよってたかって技術的な判断をしたとすると，どの企業も似たような研究テーマをやることになりがちだ（これは，大企業の研究テーマが金太郎飴になっていることを見れば一目瞭然）．だから，本人のやる気に重きを置いた当時のキヤノン中央研究所のやり方は，案外優れたやり方だったのかもしれない．ただ残念なことに，御手洗肇社長が急逝された後，中央研究所は廃所されてしまったそうである．

6. 研究テーマ

企業の研究所員の義務として，私は特許も年に

何件か書いた．もともと野蛮人はアイデアを出すのが得意なので，特許のアイデア出しは容易だった．もちろん，アイデアが新しいとか工夫が凝らされているということと，そのアイデアで儲かることとはまるで別物なので，私の特許の大部分は，他社とのクロスライセンスのときに「一山いくら」で交換するぐらいの役にしか立たない代物だった．ただ，何件かは，後に事業化に向かって動き出した製品の基本特許の一つになった．先日，その製品化に携わっているキヤノンの友人に，「試作機を1台くれ」と言ったら，「現状では，1台作るのにフェラーリを買うぐらいのコストがかかるから，まだやれない」と言われてしまった（私だって，同じ値段ならフェラーリを買う）．つまり，まだ製造時の歩留まりが悪くてコストが下がらず，発売されていない…ということは，やっぱり無駄な特許だったか（キヤノンの皆さん，ごめんなさい）．

いくら自分のアイデアを大事にしたいと言っても，私は企業の基礎研究というのは初めてなので，入社して何年間かは，上司が設定したテーマを素直に研究した．それで社内の最優秀論文賞をいただいたりと，それなりに成果は出したのだが，何か中途半端なものを感じた．実験家である上司が設定した理論の研究テーマというのは，「実験に便利な理論」であって，理論家にとっての満足度は高くはなかったのである．

そこで私は，自分で研究テーマを提唱することにした．最初に提唱したのは，波長スイッチングレーザーである．これは，非対称な2重量子井戸の中で，電子・正孔と光の非線形な相互作用を巧みに利用して，発振波長を高速にスイッチする，という全く新しい原理を提唱したものである．これは応用物理学会の会場でふと頭に浮かび，野蛮人らしく，その非線形な動作が一瞬にして予測できてしまったものだ．会社に戻ってからこのレーザーを記述する非線形方程式系も作ったが，その解は直感どおりだった．そこで若い優秀な実験家が実験してくれることになり，見事に予想通りの動作をした．また，上記の方程式系が，動特性までも正しく記述していることが分かった．野蛮人の本領発揮である．ただ，原理が新しいこととそれが使われるかどうかは全く別なので，このレーザーは欧米の研究機関ではそれなりに注目されているものの，製品には使われていない．

次に，低次元系の非線形光学応答の研究を始めた．普通は，教科書に載っている非線形応答係数の計算公式は認めてしまって，それを具体的なモデルで計算するところから始めるのだろうが，私は原理的なところを理解しないと気が済まない質なので，非線形非平衡統計力学の勉強から始めた．そして，教科書に載っている公式が，限られた状況でしか成り立たないことがわかり，愕然とした．そこで，とりあえず，その限られた状況での低次元系の非線形光学応答を調べることにした．そうして得られた予測も，若い優秀な実験家が実験してくれることになり，ほぼ予想通りの結果が得られた．ただし，定量的には，広いエネルギー範囲の寄与を計算することの困難から，十分には解明できない点も残った．

7. 興味がある研究対象の発見

さて，こうして光の物理学をやるようになったら，光の量子性が主役を演じるような物理に興味が出てきた．そして，光は電子系などに比べて高い量子コヒーレンスを保つことができるので，そういう物理では，量子測定理論をきちんと使わないと，実験と矛盾する結果になってしまうことを学んだ．学部生のときに「量子測定理論なんてくだらない」と習ったのに，実際には正反対で，精度が高い実験の結果は，量子測定理論なくしては理解不可能だったのだ！

そのことを骨の髄まで味わったのは，実際にこの方向の研究を始めてからだった．ある日私は，野蛮人の直感で，メゾスコピック電子干渉計をうまく構成すれば，光子数の量子非破壊測定ができそうだと思いついた．ところが，それを理論計算で実証しようとして愕然とした．どうやって計算して良いのか私にはさっぱり分からなかったのだ．しかし，すべての物理系が量子論で記述できるのであれば，測定器だって物理系だから，測定の反

作用や測定誤差も，原理的には量子論で計算できないとおかしい．それなのにどうやって計算していいか分からないというのは，私の量子論の理解に大きな穴があったということを意味する．

私はそれまで，まわりの物理学者と比べて，量子論の理解において自分が劣っていると感じたことは一度もなかったのに，「おまえは実はわかっていない」という事実を初めて突きつけられたのだ！それまでの私は，「普通の」物理の問題（ハバードモデルとか超伝導とか電気伝導とか励起子）しか扱ってこなかったので，その事実に気づかなかっただけだったのだ．そこで，量子測定理論を含めて，量子論を一から勉強し直した．後に量子論の教科書を書いたときに，（拙著『新版 量子論の基礎』7.4 節などに）量子論の根本原理に関して様々な立場を俯瞰（ふかん）して書くことができたのは，このときの修練が役立っている．

こうして量子論の理解が深まったので，それまでに積み上げた様々な知識や計算技術と合わせて，私が考案した量子非破壊測定器の，測定の反作用や測定誤差を計算し尽くすことができた．またこの測定過程が，それまでに言われていた量子非破壊測定の条件を満たしていないにも関わらず量子非破壊測定[*3)]になっているという，量子測定理論としても新しい側面を持っていることも分かった．「世界広しといえども，このような測定器を考案し，すべてを計算しつくすことができるのは，自分だけだろう」という密かな誇りと自信も持つことができた．

この測定器も，若い優秀な実験家が実験を始めてくださり，見事に干渉計を作るところまでいったが，光を当てる実験を行う前に，私がキヤノンをやめてしまい，実験は中断してしまった．

さて，この測定器の測定誤差の物理的な由来はなんだろうと分析してみると，非平衡状態における，量子干渉電流の揺らぎであることが分かった．そしてそれが，この測定器に限らない，一般の量子干渉デバイスの原理的な性能限界を決めることに気づいた．ちょうど熱力学が熱機関の原理的な性能限界を決めるように，量子論が量子干渉デバイスの普遍的な性能限界を決めるのだ．そしてこれは，非平衡状態における揺らぎが関与するので[*4)]，非平衡統計力学の基本的問題にも関わっていた．

この，応用から基礎物理学の広い範囲にわたる壮大な繋がりが見えたとき，私はようやく，自分が興味を持てる研究対象を発見したと感じた．私が興味があるのは，物理学のどの分野なのかとか，純粋物理のテーマなのか応用物理かというような，社会的な（？）ことを一切無視して，原理的・基礎的なことを研究することにあったのだ．それがわかるまでに，ずいぶんと遠回りをしたものである（馬鹿ですみません）．

8. 大学へ

こうして自分が興味を持てる研究対象を発見してしまったら，民間企業は居づらくなってきた．（本当はそんなに単純な話ではないのだが，もはや与えられた紙数を超過してしまったので，ばっさり省略させていただく．）

そうして悩んでいた頃，東京大学の榊裕之先生から，先生が研究代表者を務めておられた，新技術事業団の榊量子波プロジェクトのグループリーダーをやってくれないか，というお話が来た．私は快諾し，プロジェクトに出向した．このプロジェクトにいた頃は，私は本当に研究に集中でき，研究者としては一番幸せな時期だったと思う．

しかし，時限プロジェクトなので，ずっと居るわけにはいかない．そこで，1 年ぐらい経った頃榊先生に相談し，大学のポストに応募を始めた．そして幸いにして，最初に応募した現所属に拾っていただけたのであった．

尻切れトンボで申し訳ないが，この前後やその後の話は，また別の機会にしたいと思う．

（しみず・あきら，東京大学大学院総合文化研究科）

*3)　量子非破壊測定の定義は人によって微妙に異なるが，ここでは，保存量の第 1 種測定のこと．

*4)　デバイスは非平衡状態で動作するので，平衡状態におけるゆらぎ（熱雑音）ではなく，非平衡状態における揺らぎが重要なのだ．



深海を潜る

藤 原　耕 二

1. 子供のころ

小学校の1，2年の担任は藤田洋子先生という若い先生で，感じのいい人だった．先生は授業の途中に少し進んだ質問をすることがあり，あるとき教室で「1から10まで足すと，いくつでしょう？」と皆に尋ねた．10個の数字を暗算で足すのは大変だと思いながら私は心の中で足し始めたが，すぐに一人の女の子が手を上げて，「55です！」と答えた．その計算の早さに私は驚いたが，先生は「どうやって計算したの？」と聞き，彼女が「知っていました」と答えると，先生は「他にやり方はないかな？」と続けて尋ねた．

しばらくして，1と9，2と8，3と7，4と6をペアにして10を4つ作り，残りの5と10を合わせれば55になることに気がついた．10になるペアを作ることに気がついたときの驚きと喜びを，今でも何となく覚えている．手を上げて先生にそう言うと，先生は「それは，違う．他に方法はないかな？」と続けた．しばらくして先生は「正解」を説明していたが，1と10，2と9，3と8，4と7，5と6で11を5つ作る，というような方法だったのだろう，先生が黒板に書いていた階段のような絵をぼんやり覚えている．

少年時代のこの経験を振り返ってみても，自分は複雑なところに隠れたちょっとした仕組み，それを使うと何か意外なことがわかるような，そんなことが好きだ．現在の私の専門は幾何学，詳しくは幾何学的群論で，その研究対象である無限離散群には統一的な理論や研究手段が少ない．そこで何かを解き明かしたいと思っている．

2. 大学時代

東大数学科に進み，3年になると本郷で各曜日に一科目を講義と演習のペアで勉強するという日が一年間続いた．何も知らなかった私は，どの講義も面白かった．3年の終わりに，4年生セミナーでお世話になる先生を決める．幾何に興味があったので，微分幾何の落合卓四郎先生とトポロジーの松本幸夫先生に話を伺いにいった．落合先生は，「微分幾何には2つある．一つはグロモフ流，もう一つはそれ以外の古典的な微分幾何である」と説明した上で，「グロモフ流では，多様体の社会学を研究する」と言われた．当時，グロモフ（Gromov）が誰か知らなかったし，この説明には面食らった．結局，私は松本セミナーに入って，ミルナー（Milnor）の書いたモース理論とコボルディズムの本を読んだ．分野としては微分トポロジーになる．ご存じの方も多いと思うが，グロモフは1943年ロシア生まれの数学者で，幾何学に革命的

な業績を残している．

1 月になり最初のセミナーに行くと松本先生と私しか来なかった．しばらく待ってセミナーは取りやめになり，先生と数学の図書室に行った．新着雑誌の棚で先生は一冊の雑誌（*Annals of Math*）を取り上げ，「さっき見たのだけど，この論文は面白そうなので読んでみたら」と言われた．論文はエバーライン（Eberlein）という人の書いた，曲率が 0 以下であるリーマン多様体についての論文だった．先生と 2 人きりで話すのは，ほとんど初めてで感激だった．ある論文を読むことを自分に勧めてくれるというのを特別に感じた．さっそくコピーして取りかかったが，4 年生の知識では読める内容ではなく，仕方なく参考文献をたどり，初歩的な論文に行きつき代わりにそれを読んだ．その論文は微分幾何の論文で，松本先生の勧めもあり大学院では落合先生にお世話になることになった．落合先生の勧めで，修士 1 年目のセミナーでは出版されたばかりのグロモフのレクチャーノートを読んだ．モストウ（Mostow）の剛性定理の一般化をリーマン幾何の立場から証明した本である．

修士 2 年目になり，外国に行っていた深谷賢治先生が帰ってきて，今度はそちらで指導を受けることになった．夏休みが始まる前，修士論文で取り組めそうな課題として，深谷先生が 20 問くらい問題を説明してくれた．一つや二つは解けるだろうと甘く見ていたのだが，夏休み中考えても一つも解けなかった．私はひどくがっかりして，論文なんて書けそうにないと思った．二学期からはセミナーの形式が変わり，自分自身が考えたことを中心に発表するように言われた．

自分の発表日が近づいてきたが何も話すことがなくて困っているとき，深谷先生が「この前行った研究集会で，グロモフが，こんなことを言っていた」とリーマン幾何についてのある問題を教えてくれた．私は，もうこれを解くしかないと思った．次のセミナーで何も話すことがなく先生の前で立ちつくすのは御免だった．切羽詰まったおかげか，その問題は解けて次のセミナーで発表した．その後別の問題も解け，その 2 つを論文に書いて修士課程は終わり博士課程に進んだ．

深谷先生に研究指導を受けていても，落合セミナーの一員ということは変わりなく，大所帯のグループで仲良くやれたのは幸運だった．一つ上には，中島啓さんがいて親しかった．中島さんが東大の助手になって間もなく，外国に短期間研究滞在して帰ってきて，たしかウォーリック（Warwick）大とバークレーの研究所（MSRI）だったと思うが，その話を聞いたことがある．「外国っていうのは，東大と全然違うよ．みんな大学で研究しているんだ．コモンルームで，お茶の時間に研究の話をしているんだよ！」と言うのを聞いて驚いた．念のために言うが，東大の先生や学生が研究していなかったということはない．大学内の他人が見えるところでご自身の研究をしていなかっただけである．さらに，印象的だった話は外国人との共同研究についてで，「外国人っていうのは，真剣に考え出すと頭から光線が出るんだよ．こっちはクラクラしてくるけど，それに負けないように一生懸命考えるんだ」というものだった．

3. グロモフ

博士課程に入って 2 年後の 1990 年 4 月に幸い，慶應大学に助手として就職した．数学教室には小畠守男先生がいらした．その頃私の興味は，微分幾何から無限離散群に移っていた．きっかけは，博士課程時代に深谷先生の下で，グロモフが書いた双曲群についての論文を読んだことだった．グロモフを初めて見たのは，1992 年秋にグロモフが東大に一月滞在したときだ．ひと目見たくて東大に行くと図書室に座っていて，新着の雑誌（数学の専門誌）のページを，まるで週刊誌でも読むようにめくっていた．滞在中，リーマン多様体のシストールについて 3 日間の連続講演があり，3 人で分担してレクチャーノートを作ることになったが，講義が難解でひどく苦労した．どうにも分からないので，質問のため，アポイントなしでオフィスに行って，不在ならただドアの前で待っていた．運良く質問できても答えがさっぱり分からないので何度も同じ質問をした．深谷先生にも，ずいぶ

ん助けてもらいどうにか完成したが，レクチャーノートは結局出版されなかった．グロモフは伝説の人だし，あこがれだから，すべてが新鮮で衝撃だった．ある日「お昼は食べたのか？」と聞かれ，2人で近くに食べに行き，魚定食を食べたのが嬉しかった．並んで歩いていること自体が信じられなかった．

4. ウォーリック大滞在

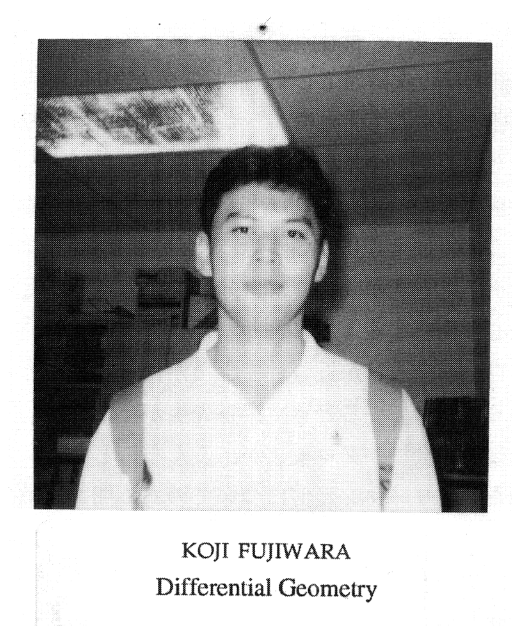
20代の終わりに始めての外国滞在をした．イギリスのウォーリック大に，エプシュタイン（D.B.A. Epstein）を訪ねて，1993年4月から3カ月滞在した．エプシュタインは前の年，会議で日本に来ていて，慶應にも講演に来た．彼はトポロジーを中心とする幅広い数学者だが，その頃サーストン（Thurston）らとオートマチック群の理論を作り上げていた．イギリスに着いて，まずエジンバラで離散群の会議に参加し，いろいろな講演を聞いたが，ほとんど分からなかった．日本では無限離散群の研究はあまり活発でなく，本格的な集会に出るのは初めてだった．いくつか興味を持てる講演はあり，その一つが自由群の有界コホモロジーについてだった．

とにかく双曲群について論文を書きたかったので，ウォーリックでは，双曲群の有界コホモロジーを計算することにした．講演で聞いた自由群に関する研究を双曲群で検証するというものだ．そのことの意義とか，そんなことはどうでもよく，とにかく定理を一つ証明したかった．ウォーリックでは研究に没頭できる環境があり，進展はあったものの，なかなか解決しなかった．ある日，午後のお茶の時間にコモンルームでエプシュタイン先生と数学の話になり，先生から共同研究の申し出があり，2人でその問題を考えることになった．

エプシュタイン先生は教室でも中心的な先生で，お茶の時間には周りに人がいて，なかなか近付けない．ある日，研究について話すために，お茶の時間の後，先生のオフィスに行った．大きなオフィスの奥に先生は座って，自分は入り口近くに立って遠くから討論していた．夕方で，電気をつけていないオフィスは薄暗かった．数学の話をしながら，わたしはクラクラしだした．先生の頭から光線が出ているのを感じ，立っているのがやっとだった．「中島さんが言っていたのはこれだったのか」，そう思った．そんなことを経て，問題が解決したのはウォーリックを立つ間際だった．

5. バークレー滞在

夏休み中，日本に帰り，1993年9月から一年半，学振の海外研究員としてバークレーの数学研究所 MSRI に滞在した．所長はサーストンだった．MSRI は通常，その年のテーマを2つ決め研究員を募集する．テーマの一つが微分幾何で，私はそのテーマの下，研究員に採用された．バークレーは，大学の数学教室に小林昭七先生がいらして，アパート探しを初め大変お世話になった．私はウォーリックでの経験もあり，無限離散群論に一層強くひかれていた．それで，数学教室にいたスターリングス（Stallings）のセミナーに入り浸った．スターリングスはトポロジストだが，無限離散群の仕事で先駆的な仕事を数多くした人で，ポア



MSRI のメンバー用写真．1993年9月．分野は Differential geometry（微分幾何）

ンカレ予想の解決に生涯とりつかれた人でもある．

当時，MSRI は主要 2 テーマに関係ない研究員も少数採用していた．その中に，セラ（Sela）という人がいて，年齢も近かったし自然に親しくなった．セラはイスラエル出身の数学者で，その先生のリップス（Rips）は組合せ群論の最高の研究者の一人である．セラはすでに双曲群に関するいくつもの華々しい成果をあげていて，「自由群の上の連立方程式の解法と解空間」について，スターリングスのセミナーで連続講演をしていた．教室のポスドクだったペレルマン（Perelman）も何度か聞きに来ていた．

6. 幾何学的群論

その後，1998 年 4 月に慶應から東北大に移った．幸運にも「幾何学的群論に関する研究業績」で 2005 年度の幾何学賞を受賞した．幾何学賞の創始者のお一人は小畠先生で，2006 年 3 月の東京での授賞式には先生もいらしてくれた．そのとき，慶應で同僚だった金井雅彦さんと相談して，先生の 80 才の誕生祝いを企画し，関係する方にも来ていただいて先生のお宅のある鎌倉で行った．小畠先生ご夫妻も喜んでくださったように思う．その年の暮れ，先生は突然お亡くなりになった．私のオフィスには *Journal of Differential Geometry* が創刊から 20 年分ある．先生が購読していたものを，定年のときに頂いたものだ．

研究分野の幾何学的群論（Geometric group theory）について説明すると，これは離散な無限群を研究対象としていて，簡単に言えば群を図形として考察して群論的な結果を導くことを目指している．有限群については深い理論があり，1980 年代には一つの決着をみている．離散群に対して，連続群の場合は，リー群について完成した古典的理論がある．加えて，リー群の格子部分群と呼ばれる離散無限群にはマルグリス（Margulis）の理論などまとまった理論がある．それに比べて，一般の離散無限群には散発的な理論しかなかった．一方，離散無限群にはコクセター群やアルチン群，写像類群など深く研究されてきた例はあり，豊かな数学の存在がある．離散群は多様体の基本群として現れ，また決定問題を通してアルゴリズムやコンピュータサイエンスとの本質的な関わりがあり，重要であり有用である．そのような状況で，1980 年代にグロモフが創始した双曲群の理論（私が博士課程で読んだ論文）は，無限離散群の景色を一変させ，統一的な俯瞰を与えた．その後の発展の中で，無限離散群と数学の他の分野との関わりは一層具体性を増している．

7. 離散群の JSJ 分解

自分の仕事の中でもっとも印象に残るのは，離散群の「JSJ 分解」についてだ．JSJ とは Jaco–Shalen–Johannson という 3 人の数学者の頭文字で，3 人は 3 次元多様体の分解についての決定的な理論を 1970 年代に得ている．この理論を踏まえて，1980 年頃サーストンは「3 次元多様体の幾何化予想」を述べた．ご存知の方も多いと思うが，この予想はペレルマンにより数年前に解決され，その一つの帰結としてポアンカレ予想がついに証明された．

1990 年代初めに JSJ 分解にまつわる思いも寄らない展開があった．リップスとセラが JSJ 分解のある種の類似を，無限離散群に発見したことである．しかし，表面的な類似にも見え，また部分的な成果かも知れなく，果たしてこの JSJ 理論が 3 次元多様体で果たしたような本質的な役割を，離散群論で持つかは未知数だった．リップスは 1994 年のチューリッヒの ICM（世界数学者会議）で，この仕事について講演した．私は MSRI に滞在中で，アメリカ数学会から旅費をもらい ICM に参加した．リップスの講演会場は熱気に満ちていて，最後の質疑応答で，離散群の JSJ 分解の理論をより完全なものにするという問題提起がリップスからあった．

バークレーから 1995 年 3 月に日本に帰り，11 月，研究上の知り合いのパパソグル（Papasoglu）が一月，パリから私を訪問してきた．彼はバス（Bass）の元で数年前に博士号を取ったギリシャ人で，離散群論のテクニックに習熟していた．2 人で何か

研究に取り組もうということになり，いろいろなプレプリントを見たり文献を調べたりして，どの問題が重要なのか，自分たちに解決可能に見えるかを話しあった．一月の滞在は，ほとんど問題選びに費やし，最後に離散群のJSJ理論の完成に2人で取り組むことにした．それから日本とフランスでメールのやりとりをして研究を続け，1996年3月は，今度は私が一月パパソグルをパリに訪ねた．市内にあるシテ・ユニバシテという学生寮の巨大な集合住宅に泊まった．休みもなく毎日，朝から晩まで2人で仕事をした．住宅と仕事場（大学またはカフェ）を往復するだけだったが，一日だけベルサイユ宮殿に2人でいった．帰国後も研究を続け，今から思えば，その頃我々はよいアイディアを得ていた．

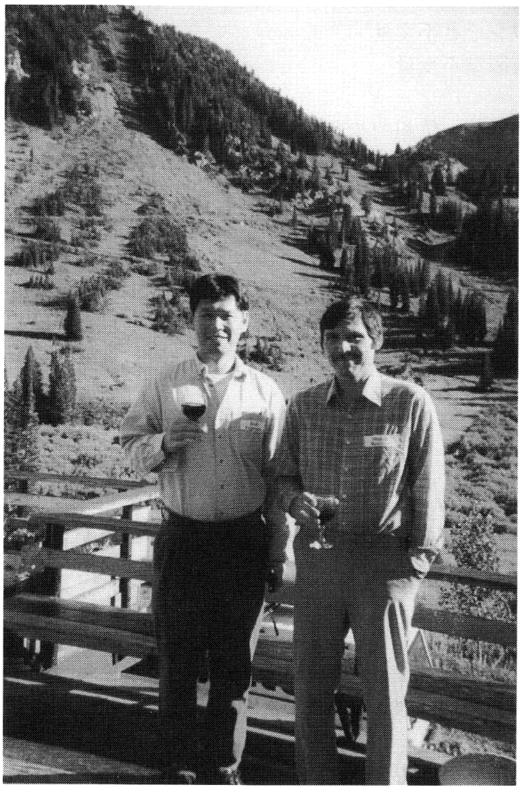
1996年8月，オーストラリアのメルボルンで群論の研究集会があり，その機会に2人で会うことにした．私は滞在を4週間に延長して，JSJ分解のことを絶え間なく考え続けた．もう文献を調べることもあまりなく，計算することも尽きていた．ただ何かを暗闇でじっと見つめるように考え続けていた．朝起きるとすでに頭の中で考えていて，そこから中断なく考え，寝る瞬間まで考えていた．見えそうだが見えない，そんな時間が何百時間か続いた．パパソグルが一足先にパリに帰り，自分の滞在も終わりに近いある日，大学でブラブラしながら一人で考えていた．そのとき，何かが見え始め，それを紙の上で確かめたくなり，空いていた教室に入り込み，座ってじっと考えた．数十分して，本質的な困難が突破できたのがわかった．それまでは，真っ暗闇の深海をひたすらもぐり続けているような感覚だった．いつか海底に着くはずだと思い，下降しているつもりだが，景色に何の変化もない．果たして自分が本当に下降しているのか，それすら分からないときもあった．深海はひどく圧力が高く，少しの動きも苦しい．それに耐えて，ただひたすらもぐっていく．そんな感じだった．しかし，教室でのその瞬間は，ついに海底に到達し，そこで何かを見た．今まで誰も行ったことのない深い場所に潜り，そこで何かを見たという充実と脱力を感じた．音も色もない世界から私は静かに浮上を始めた．そのあと，パリにいるパパソグルとやりとりを続け，お互い問題を解決したという確信をもち，ざっと原稿を書きセラを含む少数の関係者に伝えた．

その後すぐ，1996年10月にモントリオールとニューヨークに会議で行った．モントリオールにはリップスも来ていて，「Your theorem is beautiful（あなたたちの定理は美しい）」と言われて感激した．リップスはセラから我々の仕事について聞いていたそうだ．会議の参加者にベスティビナ（Bestvina）という人がいて，会議中に，「JSJ理論について新しい成果を得たそうだけど，教えてくれ」と言ってきたので，カフェに言って説明した．彼は幾何学的群論で多くの顕著な成果を上げていた一人だが，それまでに話したこともなかった．話してみると，頭の回転が速い人で，20分くらい説明すると分かったと言い，「amazing（おどろいた）」と誉められた．ニューヨークにはパパソグルも来て，彼が会議でJSJ理論の完成について初めて講演した．大きな反響があり，講演が終わると，何人もの人が演壇に近づいてきて，そのうちの一人が「おめでとう（Congratulation）!」といいながら我々に握手を求めてきた．

その理論を論文に書くのは，容易な作業ではなかった．雑誌に投稿した後もレフリーに時間がかかったり，書き直したり，結局専門誌に出版されたのが2006年．10年以上かかったことになる．この仕事には，論文を書き上げるまで数千時間かかった．今までに一番長い時間がかかった仕事だ．

8. 欧米人との研究

私の場合，欧米人との共同研究が多い．そこで体験した欧米人の研究への取組み方や考え方は，その後の私の研究姿勢に大きく影響した．パパソグルとJSJ理論に取り組むときもそうだが，欧米人は常に目的がはっきりしていて，その意味や意義，実現可能性をしっかり吟味する．結果を必ず出すという目的意識がはっきりしていて，ひとたび動き出すと強い推進力があり，ここ一番での集


ベスティビナとユタ大の新学期のパーティで．1998 年 9 月．



MSRI にて．2007 年 11 月．

中力が強い．これには，欧米文化の本質がある気がする．私は共同研究を通して，否応なくその異質さと向き合ってきた．必要な語学力は遅かれ早かれ身に付くものだが，より難しく感じるのは考え方や行動様式の違いで，それへの対処法は人さまざまだ．無視する，対決する，同化する，あいまいにやり過ごすなど．何回かの外国研究滞在と共同研究を通して，試行錯誤の末，自分のやり方を身につけた．

モントリオールで話したのをきっかけに，1998 年の秋から冬にかけてソルトレークのユタ大学にベスティビナを訪問した．それ以来，一緒に仕事をする間柄になり，一定の間隔で短期間訪問するが，数学浸けの時間になる．「How was your flight?（飛行機はどうだった）」というお決まりの挨拶が終われば数学の話になり，滞在中は朝から晩まで研究の話になる．数学の研究はなかなか目に見えて進展しないもので，多くの時間は重苦しい．狭いオフィスの中，2 人でカリカリしているのは大変なストレスを感じるものだ．先日も訪問中に，授業のために 1 時間オフィスをあけて帰ってきた彼が，ドアを開けるなり，「Did you prove anything?（何か俺のいない間に証明したか）」と言うので苦笑した．1 週間程度の滞在では目立って前進しないこともある．それでも，研究への欲求，興味と熱意を共有できる共同研究者との格闘，うまくいったときの満足感，それらすべてが一体となって自分を押し進めている．

私は現在 40 代半ばである．これからも自分にできる限り，一つでも良い定理を示したい．この文章でも少しふれたが，今まで多くの方にお世話になり助けられている．つまるところ，数学研究もいろいろな意味で多くの人間の共同作業で，止まることのない巨大な流れだ．その一員として貢献したい．自分が身につけたもの，自分の中で培われたものが，少しでも他の人，特に若い人たちの役に立てばと思っている．

（ふじわら・こうじ，東北大学大学院情報科学研究科）

特　集（2009年10月号予告）

数学と物理に広がる不変量

量子トポロジーとその周辺

量子トポロジーと不変量	大槻　知忠
結び目の有限型不変量	葉廣　和夫
体積予想	村上　　順
結び目の不変量と位相的弦理論	菅野　浩明
統計物理の可解模型と結び目不変量	出口　哲生
表現論と結び目不変量	有木　　進
数論と結び目不変量	森下　昌紀
Planar algebra 入門	佐藤　信哉
ヒーゴールフレアホモロジー	丹下　基生
［コラム］	長谷川真人
《名著に親しむ》	高田　敏恵
［編集部一問一答］	大槻　知忠

本体952円

特　集（2009年8月号）

複素数

その奥深い魅力と広がり

巻頭言	野口潤次郎
複素数とは何か	難波　　誠
複素関数のキーワード 正則関数，コーシーの積分定理，留数定理など	真島　秀行
微分方程式と複素関数	吉田　正章
素数分布と函数論	本橋　洋一
複素力学系入門	宍倉　光広
複素数と基礎物理　物理における複素数の役割	佐藤　　光
複素数と現代物理　自然は複素数を必要としているのか	加藤　晃史
［コラム］有理型関数と学習理論	渡辺　澄夫
［コラム］複素数からクリフォード代数へ	前田　吉昭
［コラム］複素数と数理工学	田中　剛平 合原　一幸
《名著に親しむ》『函数論』の思い出	大沢　健夫
［インタビュー］複素数いろいろ	野口潤次郎
《連載》目で見て学ぶ量子力学　その12	外村　　彰
問題例で深める物理　その7	香取　眞理 中野　　徹
《物理の道しるべ》第10回	北原　和夫

本体952円

編集後記

記事中に出てくる世紀末ウィーンと呼ばれている時代の文化を調べてみると，「マーラーがウィーンフィルの指揮者に就任」という記述を見つけました．かつてギネスブックに長大な交響曲として掲載されていた交響曲第3番が作曲された頃にあたりますが，こういう時期にシュレーディンガーは若き日を過ごしたのかと思うと，とても親近感を覚えます．　(R)

数　理　科　学　9月号

2009年9月1日発行

数理科学編集部　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.

発行所　©　株式会社　サイエンス社　　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁